¿Por qué razón el propagador (físico) debe tener un polo en $p^2 = m^2_{phys}$ y un residuo "Z" ?

$|\Omega\rangle \rightsquigarrow$ vacío de la teoría interactuante

$\varphi(x) \rightsquigarrow$ campo (escalar, hermítico) de la teoría interactuante.

Propagador: $\langle \Omega | T(\varphi(x)\varphi(y)) | \Omega \rangle$ (1)

La transformada de Fourier del propagador es (salvo una constante):

$$G(q_1, q_2) = \int d^4x \int d^4y \; e^{iq_1 \cdot x} e^{iq_2 \cdot y} \langle \Omega | T(\varphi(x)\varphi(y)) | \Omega \rangle \qquad (2)$$

→ Asumimos que los campos son "campos de Heisenberg", es decir, que tienen la siguiente propiedad de transformación:

$$\varphi(x) = e^{i\mathcal{P}\cdot x} \varphi(0) e^{-i\mathcal{P}\cdot x} \qquad (3)$$

De aquí se sigue facilmente que, si $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son estados propios del operador de energía-momento $\mathcal{P}^\mu$ (es decir, $\mathcal{P}^\mu |\alpha\rangle = p^\mu_\alpha |\alpha\rangle$, $\mathcal{P}^\mu |\beta\rangle = p^\mu_\beta |\beta\rangle$), entonces

$$\langle \beta | T(\varphi(x)\varphi(y)) | \alpha \rangle = e^{i(p_\beta - p_\alpha)\cdot x} \langle \beta | T(\varphi(y-x)\varphi(x)) | \alpha \rangle, \quad (4)$$

donde, como es usual en el espacio de Minkowski, estamos asumiendo que $\mathcal{P}^\mu |\Omega\rangle = 0$.

Supongamos ahora que existen estados bien definidos de una partícula de masa $m_{phys} \equiv m_*$. Siguiendo la notación que hemos usado en el caso libre para denotar estados de una partícula "de Wigner", denotaremos con $|[m_*], p\rangle$ a los estados de 1-partícula cuya existencia estamos asumiendo.

Para estos estados vale que $\mathcal{P}^\mu |[m_*], p\rangle = p^\mu |[m_*], p\rangle$, con $p_\mu p^\mu = m_*^2$ ($\rightarrow$ "on-shell").

Si $\{|n\rangle\}_n$ ONB para el espacio de Hilbert, entonces el proyector sobre el sector de 1-partícula será

$$E_{1p} := \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} |[m_*], \vec{p}\rangle\langle [m_*], \vec{p}|$$

$$\searrow \quad \mathbb{1} = \underbrace{\sum_n}_{\text{todos los estados}} |n\rangle\langle n| = E_{1p} + \underbrace{\sum_{n\,(\text{mult})}}_{\text{estados multipart.}} |n\rangle\langle n|$$

$\Longrightarrow$

$$G(q_1, q_2) = \int d^4x \int d^4y \; e^{iq_1 \cdot x} e^{iq_2 \cdot y} \langle \Omega | T(\varphi(x)\varphi(y)) | \Omega \rangle$$

$$= \int d^4x \int d^4y \; e^{iq_1 \cdot x} e^{iq_2 \cdot y} \Big(\underbrace{\theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \varphi(x)\varphi(y) | \Omega \rangle}_{\text{por ahora nos concentramos en esta contribución...}} + \theta(y^0 - x^0) \langle \Omega | \varphi(y)\varphi(x) | \Omega \rangle \Big) + (\ldots)$$

$$= \int d^4x \int d^4y \; e^{iq_1 \cdot x} e^{iq_2 \cdot y} \; \theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \varphi(x)\varphi(y) | \Omega \rangle + \text{"}(x \leftrightarrow y)\text{"} + (\ldots)$$

$\longrightarrow$

$$\int d^4x \int d^4y \; e^{iq_1\cdot x} e^{iq_2\cdot y} \; \theta(x^0-y^0) \langle\Omega|\varphi(x)\varphi(y)|\Omega\rangle$$

$$= \int d^4x \int d^4y \; e^{iq_1\cdot x} e^{iq_2\cdot y} \theta(x^0-y^0) \langle\Omega|\varphi(x) \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} |[m_*],\vec{p}\rangle\langle[m_*],\vec{p}\,|\varphi(y)|\Omega\rangle \; + \; (\cdots)$$

$$\overset{(4)}{=} \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} e^{iq_1\cdot x} e^{iq_2\cdot y} \theta(x^0-y^0) e^{-ix\cdot p} e^{iy\cdot p} \underbrace{\left|\langle\Omega|\varphi(0)|[m_*],\vec{p}\rangle\right|^2}_{\equiv Z/(2\pi)^3} \; + \; (\cdots)$$

como se trata de un campo escalar, por cov. de Lorentz Z es indep. de $\vec{p}$!

Haciendo uso de la siguiente representación integral de la función θ (Heaviside),

$$\theta(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega - i\epsilon} ,$$

obtenemos la siguiente forma para la expresión anterior:

$$\frac{1}{2\pi i} \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \frac{e^{iq_1\cdot x}}{(2\pi)^3} e^{iq_2\cdot y} \; e^{ip\cdot(y-x)} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{i\omega(x^0-y^0)}}{\omega - i\epsilon} \cdot Z$$

insertar $1 = e^{-iq_1 y} e^{iq_1 y}$

$$= \frac{-iZ}{(2\pi)^4} \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \; e^{i(p-q_1)\cdot(y-x)} \cdot e^{i(q_1+q_2)\cdot y} \int d\omega \, \frac{e^{i\omega(x^0-y^0)}}{\omega - i\epsilon}$$

Para la parte espacial de los 4-vectores x e y, considerar el siguiente cambio de variables $\longrightarrow$

$$\vec{\alpha} := \vec{y} \quad , \quad \vec{\beta} := \vec{y} - \vec{x}$$

$$\Longrightarrow \quad d^3\vec{\alpha}\, d^3\vec{\beta} = d^3\vec{y}\, d^3\vec{x}$$

$$\rightsquigarrow \frac{-iZ}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \int_{-\infty}^{\infty} dy^0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \overbrace{\int d^3\vec{\alpha} \int d^3\vec{\beta}\, e^{i(\vec{p}-\vec{q}_1)\cdot\vec{\beta}}\, e^{i(\vec{q}_1+\vec{q}_2)\cdot\vec{\alpha}}}^{=(2\pi)^6\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}_1)\,\delta^{(3)}(\vec{q}_1+\vec{q}_2)} \times$$

$$\times\, e^{i(p^0-q_1^0)(y^0-x^0)} \cdot e^{i(q_1^0+q_2^0)y^0}\, \frac{e^{i\omega(x^0-y^0)}}{\omega - i\epsilon}$$

$$= \frac{-iZ(2\pi)^2}{2E_{q_1}}\delta^{(3)}(\vec{q}_1+\vec{q}_2)\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \int_{-\infty}^{\infty} dy^0\, \frac{e^{i(q_1^0+q_2^0)y^0}}{\omega - i\epsilon}\, e^{i(x^0-y^0)(\omega - E_{q_1}+q_1^0)}$$

Nuevo cambio de variables:

$$\tau := x^0 - y^0 \qquad \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, e^{i(q_1^0+q_2^0)\lambda} = 2\pi\delta(q_1^0+q_2^0)$$

$$\lambda := y^0$$

$$\rightsquigarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\tau(\omega - E_{q_1}+q_1^0)} = 2\pi\delta(\omega - E_{q_1}+q_1^0)$$

$$= \frac{-iZ(2\pi)^4}{2E_{q_1}}\delta^{(4)}(q_1+q_2)\frac{1}{E_{q_1}-q_1^0-i\epsilon} \qquad (*)$$

Ejercicio: Mostrar que la contribución del término que es proporcional a $\theta(y^0-x^0)$ es (casi) la misma que en la expresión $(*)$, con la diferencia de que en el denominador el signo de q_1^0 cambia: $E_{q_1}+q_1^0-i\epsilon$

Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, obtenemos el siguiente resultado:

$$G(q_1,q_2) = \int d^4x \int d^4y \; e^{iq_1\cdot x} \, e^{iq_2\cdot y} \langle \Omega | T(\varphi(x)\varphi(y)) | \Omega \rangle$$

$$= -\frac{iZ(2\pi)^4}{2E_{q_1}} \delta^{(4)}(q_1+q_2) \left(\frac{1}{E_{q_1} - q_1^0 - i\epsilon} + \frac{1}{E_{q_1} + q_1^0 - i\epsilon} \right)$$

$$+ \; (\dots)$$

contribuciones de estados multipartículas (no afectan la estructura de polos a nivel de 1-partícula)

$$= -\frac{iZ(2\pi)^4}{2E_{q_1}} \delta^{(4)}(q_1+q_2) \left(\frac{E_{q_1} \cancel{- q_1^0} - i\epsilon^{\nearrow 0} + E_{q_1} \cancel{+ q_1^0} - i\epsilon^{\nearrow 0}}{m_*^2 + \vec{q}_1^{\,2} - (q_1^0)^2 - i\epsilon'} \right)$$

$$+ \; (\dots)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1+q_2) \frac{iZ}{q_1^2 - m_*^2 + i\epsilon'}$$

El cálculo para el caso del campo libre se hace fácilmente $\longrightarrow$

$$\overset{(0)}{G}(q_1,q_2) = \int d^4x \int d^4y \; e^{iq_1\cdot x} \, e^{iq_2\cdot y} \underbrace{\langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle}_{= \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2-m^2+i0^+}}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{k^2-m^2+i0^+}\int d^4x \int d^4y \; e^{iq_1 x} e^{iq_2 y} e^{-ik(x-y)}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{k^2-m^2+i0^+}\int d^4x \int d^4y \; e^{i(q_1-k)(x-y)} e^{i(q_1+q_2)y}$$

Cambio de variable $\rightarrow$ $\alpha = x-y$, $\beta = y$ $(\mathrm{Det}=1)$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{k^2-m^2+i0^+}\underbrace{\int d^4\alpha \int d^4\beta \; e^{i(q_1-k)\cdot\alpha} \, e^{i(q_1+q_2)\cdot\beta}}_{=(2\pi)^8\delta(q_1-k)\delta(q_1+q_2)}$$

$$= (2\pi)^4 \delta(q_1+q_2) \frac{i}{q_1^2-m^2+i0^+}$$

Tenemos entonces que el propagador "físico" $G(q_1,q_2)$ presenta un polo en $q_1^2 = m_*^2$ con residuo Z :

$$\boxed{\begin{aligned} G(q_1,q_2) &= (2\pi)^4\delta(q_1+q_2)\frac{iZ}{q_1^2-m_*^2+i0^+} \\ \overset{(0)}{G}(q_1,q_2) &= (2\pi)^4\delta(q_1+q_2)\frac{i}{q_1^2-m^2+i0^+} \end{aligned}}$$