Teoría de Grupos en Mecánica Cuántica (A. Reyes). Tarea 1. 28.08.2019

---

1. Sean G un grupo finito, y M un conjunto (también finito) sobre el cual actúa G. Considere el espacio vectorial $\mathcal{F}(M)$ de las funciones sobre M con valores complejos:

$$\mathcal{F}(M) := \{f : M \to \mathbb{C}\}. \tag{1}$$

En clase hemos visto que la acción de G en M induce, de manera natural, una representación de G en $\mathcal{F}(M)$, a la que hemos llamado ρ^M. Muestre que para el caracter de esta representación, χ^{ρ^M}, se cumple (para todo $g \in G$):

$$\chi^{\rho^M}(g) = |M_g| \equiv \text{número de puntos fijos de } g.$$

2. El *centro* Z de un grupo G es el subgrupo (abeliano) de todos los elementos z de G que conmutan con todos los elementos de G, i.e., $Z = \{z \in G \,|\, zg = gz \text{ para todo } g \in G\}$. Muestre que G/Z es isomorfo al subgrupo $I(G)$ de $\mathrm{Aut}(G)$ de todos los *automorfismos internos* de G.

3. Considere una acción a izquierda de un grupo G sobre un conjunto M,

$$\begin{aligned} \ell :\ G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto \ell_g(x) \equiv g \cdot x. \end{aligned} \tag{2}$$

Dado un punto $x \in M$, definimos la *órbita* de x bajo G como el conjunto

$$\mathcal{O}_x := \{g \cdot x \,|\, g \in G\}. \tag{3}$$

Así mismo definimos el subgrupo de isotropía de x ("little group") como

$$G_x := \{g \in G \,|\, g \cdot x = x\}. \tag{4}$$

Defina ahora una relación de equivalencia en G, dada por las clases laterales izquierdas de G_x, es decir, si g_1 y g_2 pertenecen a G, decimos que están relacionados ($g_1 \sim g_2$) si y solo si $g_1^{-1} g_2 \in G_x$. El conjunto de clases de equivalencia es el espacio cociente G/G_x. Un *elemento* de este espacio cociente es un conjunto de la forma

$$[g] = \{h \in G \,|\, h \sim g\}. \tag{5}$$

Note que G/G_x hereda una acción de G, definida como

$$\begin{aligned} \rho :\ G \times (G/G_x) &\longrightarrow (G/G_x) \\ (\ g\ ,\ [h]\ ) &\longmapsto \rho_g([h]) := [gh] \equiv g \cdot x, \end{aligned} \tag{6}$$

con lo cual podemos decir que G/G_x es un G-conjunto.

Construya un mapa $\phi : G/G_x \to \mathcal{O}_x$ que tenga las siguientes propiedades:

(a) ϕ es una biyección (debe mostrarlo).

(b) ϕ es un mapa G-equivariante (debe mostrarlo).

Esta tarea puede ser desarrollada (y entregada) de manera individual o en parejas. Fecha de entrega: Viernes 6 de septiembre, en clase.