§9. Irreps. y clases de conjugación.

En §7 obtuvimos el interesante resultado, según el cual la representación regular contiene como subrepresentación a cada una de las representaciones irreducibles, con una multiplicidad igual a la dimensión:

$$\rightarrow \mathcal{F}(G) \cong \bigoplus_{\alpha\in\hat{G}} n_\alpha V^\alpha .$$

El hecho de que la multiplicidad coincida con la dimensión, implica que el subespacio $n_\alpha V^\alpha \equiv \underbrace{V^\alpha \oplus V^\alpha \oplus \cdots \oplus V^\alpha}_{\leftarrow\, n_\alpha\text{-veces}}$ (cuya dimensión es n_α^2) es isomorfo, como espacio vectorial, al producto tensorial $V^\alpha \otimes V^\alpha$ (simplemente por el hecho de que las dimensiones de ambos espacios coinciden). El hecho de que –como álgebra– el espacio de funciones sobre G sea isomorfo a un álgebra matricial de la forma $\bigoplus_{\alpha\in\hat{G}} M_{n_\alpha}(\mathbb{C})$ (ec. (7) en §8), nos lleva a pensar que es más adecuado considerar un isomorfismo de la forma

$$n_\alpha V^\alpha = V^\alpha \oplus \cdots \oplus V^\alpha \cong (V^\alpha)^* \otimes V^\alpha$$

De hecho, teniendo en cuenta el isomorfismo $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V,W)$, tenemos entonces que

$$\underbrace{n_\alpha V^\alpha}_{(a)} \cong (V^\alpha)^* \otimes V^\alpha \cong \mathrm{Hom}(V^\alpha, V^\alpha) \equiv \underbrace{M_{n_\alpha}(\mathbb{C})}_{(b)}.$$

Mientras que la forma (a) es natural si consideramos al espacio de funciones solo como un espacio vectorial $(\mathcal{F}(G))$, la forma (b) es más apropiada cuando tomamos en cuenta su estructura de álgebra $(\mathcal{A}(G))$. De hecho, el isomorfismo $\mathcal{A}(G) \cong \bigoplus_{\alpha\in\hat{G}} M_{n_\alpha}(\mathbb{C})$ (§8, ec. (7)), se obtuvo de manera muy sencilla tan pronto obtuvimos la relaciones (8.6), que sacan máximo provecho del producto de convolución.

Sin embargo, hay una forma alternativa de establecer el isomorfismo
$$\mathcal{F}(G) \cong \bigoplus_{\alpha\in\hat{G}} (V^\alpha)^* \otimes V^\alpha , \qquad (1)$$
que hace uso de los mapas
$$T^\alpha : (V^\alpha)^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(V^\alpha, \mathcal{F}(G))$$
que estudiamos en §7. Recordemos que de la inyectividad de dicho mapa obtuvimos que $m_\alpha = n_\alpha$ (multiplicidad = dimensión).

Interpretando dichos mapas de manera adecuada, podremos establecer el isomorfismo (1) y, de paso, obtener un interesante resultado, que nos permitirá relacionar $\hat{G}$ (irreps de G) con las clases de conjugación de G.

—————— // ——————

- Recordemos el producto directo $G\times H$ de dos grupos, cuya regla de multiplicación está dada por $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$. Usando la multiplicación en G podemos definir una acción de $G\times G$ sobre G, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(G\times G)\times G &\longrightarrow G \\ (a,b)\,,\ x &\longmapsto (a,b)\bullet x := a x b^{-1}\end{aligned} \qquad (2)$$

Es inmediato ver que (2) define una acción a <u>izquierda</u>:
$$\begin{aligned}(a_1,b_1)\bullet\big((a_2,b_2)\bullet x\big) &= (a_1,b_1)\bullet(a_2 x b_2^{-1}) = a_1a_2\, x\, b_2^{-1} b_1^{-1} \\ &= (a_1a_2)\, x\, (b_1b_2)^{-1} = (a_1a_2, b_1b_2)\bullet x = \big((a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)\big)\bullet x.\end{aligned}$$

Al poder ver a G como un $G\times G$-conjunto, obtenemos una representación de $G\times G$ en $\mathcal{F}(G)$, de la misma forma como se explica en la pág 29 (con $M = G$). A esta representación la llamaremos $\hat{\rho}^{G\times G}$. Explícitamente, tenemos:
$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{G\times G} : G\times G &\longrightarrow Gl(\mathcal{F}(G)) \\ (a,b) &\longmapsto \hat{\rho}^{G\times G}(a,b) : \mathcal{F}(G) \longrightarrow \mathcal{F}(G) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad f \longmapsto \hat{\rho}^{G\times G}(a,b) f ,\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\hat{\rho}^{G\times G}(a,b) f\right)(x) := f\big((a,b)^{-1}\bullet x\big) = f(a^{-1} x b).} \qquad (3)$$

- Si $\rho : G \to Gl(V)$ es una representación de un grupo G, hay una forma natural de obtener una nueva representación, $\hat{\rho} : G \to Gl(V^*)$. Basta con definir, para $g \in G$, $\varphi \in V^*$, $v \in V$:

$$(\hat{\rho}(g)\varphi)(v) := \varphi(\rho(g^{-1})v) \qquad (4)$$

Esta representación se denomina la <u>representación contragrediente</u>.

<u>Ejercicio 1</u>

Sea $\{v_i\}_i$ una base para V. Denotar con $D(g)$ las matrices de la representación $\rho : G \to Gl(V)$ en la base $\{v_i\}_i$:

$$\rho(g)\, v_i = \sum_j D_{ji}(g)\, v_j .$$

Consideremos ahora la base dual, definida por $\tilde{v}^j(v_i) := \delta_{ij}$ ($\tilde{v}^j \in V^*$).
Sean $\hat{D}(g)$ las matrices de repn. de $\hat{\rho}$ en la base dual.
Expresar $\hat{D}(g)$ en términos de $D(g)$.

- Recordemos que, dadas dos representaciones $\rho_G : G \to Gl(V)$ y $\rho_H : H \to Gl(W)$, tenemos una representación "producto" de $G \times H$ en $V \otimes W$, dada por

$$\rho_G \otimes \rho_H \,(g,h) := \rho_G(g) \otimes \rho_H(h)$$

<u>Ejercicio 2</u>

Mostrar que si ρ_G y ρ_H son irreducibles, entonces $\rho_G \otimes \rho_H$ también lo es.

- El resultado del ejercicio 1 puede ser usado para mostrar que, si ρ es irred. entonces $\hat{\rho}$ también lo es. Por lo tanto podemos concluir que si $\alpha \in \hat{G}$, entonces $\hat{\rho}^\alpha \otimes \rho^\alpha : G \times G \longrightarrow Gl(V^{\alpha *} \otimes V^\alpha)$ <u>es</u> irreducible.
No está de más resaltar que $\hat{\rho}^\alpha \otimes \rho^\alpha$ es una representación de $G \times G$, <u>no</u> de G!

- Vía el isomorfismo (1) tiene sentido preguntarse si $\hat{\rho}^{\alpha}\otimes\rho^{\alpha}$ aparece como una subrepresentación de $\hat{\rho}^{G\times G}$.

<u>Ejercicio 3</u> Mostrar, haciendo uso de la identidad (*), §6, que la respuesta a la pregunta anterior es positiva y que, de hecho, la multiplicidad de $\hat{\rho}^{\alpha}\otimes\rho^{\alpha}$ en $\hat{\rho}^{G\times G}$ es igual a uno.

- De manera similar podemos mostrar que $\alpha\not\sim\beta \Rightarrow \hat{\rho}^{\alpha}\otimes\rho^{\alpha}\not\sim\hat{\rho}^{\beta}\otimes\rho^{\beta}$.

Teníamos un mapa inyectivo $T^{\alpha}: V^{\alpha *}\longrightarrow \mathrm{Hom}_G(V^{\alpha},\mathcal{F}(G))$.

Es conveniente reescribir dicho mapa así:

$$\begin{aligned} S^{\alpha}: V^{\alpha *}\otimes V^{\alpha} &\longrightarrow \mathcal{F}(G) \\ \varphi\otimes v &\longmapsto f^{\varphi}_{\alpha,v} \end{aligned} \qquad \left(\text{recordemos}\rightarrow f^{\varphi}_{\alpha,v}(g):=\varphi(\rho^{\alpha}(g^{-1})v)\right)$$

Se muestra fácilmente que S^{α} es 1-1.

Notemos además que S^{α} es $(G\times G)$-equivariante: $S^{\alpha}\in \mathrm{Hom}_{G\times G}(V^{\alpha *}\otimes V^{\alpha},\mathcal{F}(G))$, i.e., el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V^{\alpha *}\otimes V^{\alpha} \arrow[r, "S^{\alpha}"] \arrow[d, "\hat{\rho}^{\alpha}(a)\otimes\rho^{\alpha}(b)"'] & \mathcal{F}(G) \arrow[d, "\hat{r}^{G\times G}(a,b)"] \\ V^{\alpha *}\otimes V^{\alpha} \arrow[r, "S^{\alpha}"'] & \mathcal{F}(G) \end{tikzcd}$$

<u>Ejercicio 4</u>

Mostrar que $f^{\hat{\rho}^{\alpha}(b)\varphi}_{\alpha,\rho^{\alpha}(a)v} = \hat{\rho}^{G\times G}(a,b) f^{\varphi}_{\alpha,v}$ y que esta es justo la condición de que S^{α} sea $G\times G$-equivariante (aquí es más conveniente tomar $V^{\alpha}\otimes V^{\alpha *}$)

Por el lema de Schur tenemos, como consecuencia del ejercicio anterior (ver comentarios que siguen a la 1era proposición en §6) que $V^{\alpha *}\otimes V^{\alpha}$ debe aparecer en la descomposición en irreducibles de $\mathcal{F}(G)$ (como repn. de $G\times G$ vía $\hat{\rho}^{G\times G}$). En el ejercicio 3 hemos mostrado este mismo hecho de manera directa, y de paso hemos calculado la multiplicidad.

Hemos mostrado, por lo tanto,

Teorema
$$\mathcal{F}(G) \cong \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} (V^{\alpha *} \otimes V^{\alpha}) ,$$

donde el isomorfismo se refiere a la equivalencia de los dos espacios, entendidos como espacios de representación de $G \times G$. Dicho de otra forma, tenemos:
$$\hat{\rho}^{G \times G} \sim \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} (\hat{\rho}^{\alpha} \otimes \rho^{\alpha}).$$

¿Para qué nos sirve todo esto?

Recordemos (§6) que una consecuencia del lema de Schur es que, para una repn $\rho : G \to Gl(V)$, se tiene $\dim_G(V,V) = m_1^2 + \cdots + m_k^2$ (suma de los cuadrados de las multiplicidades).

En este caso, el grupo es $G \times G$ y la repn. $\hat{\rho}^{G \times G}$. Hemos mostrado que $m_1 = m_2 = \cdots = m_k = 1$ y que $k = |\hat{G}|$.

Por lo tanto, tenemos
$$\dim \mathrm{Hom}_{G \times G}(\mathcal{F}(G), \mathcal{F}(G)) = 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 = |\hat{G}|$$

Por otro lado (§7 pag 3) sabemos que la dimensión de este espacio también coincide con el número de órbitas de $G \times G$ en $G \times G$, donde la acción que debemos considerar (pág 3, §7) es
$$(G \times G) \times (G \times G) \longrightarrow (G \times G)$$
$$(a,b),\ (x,y) \longmapsto (a,b)\cdot(x,y) = ((a,b)\cdot x, (a,b)\cdot y)$$
$$= (a x b^{-1}, a y b^{-1}).$$

Al igual que en nuestro análisis previo (§7), cada órbita contiene un elemento de la forma (e,x). Pero a diferencia de ese caso, ahora dicho elemento no es necesariamente único. De hecho, por la forma en que está definida la acción, tenemos:

$$(g,g)\cdot(e,x) = (e, gxg^{-1})$$

<u>Ejercicio 5</u> Mostrar que existe una biyección entre el conjunto de las clases de conjugación de G y el conjunto de órbitas de la acción $(G\times G)\times(G\times G) \longrightarrow (G\times G)$ descrita arriba.

→ Hemos obtenido el siguiente resultado importante:

> "El número de representaciones irreducibles inequivalentes es igual al número de clases de conjugación"