§ 8. El Álgebra de Grupo

Previamente hemos estudiado el espacio de funciones $\mathcal{F}(G)$ para G un grupo finito. Hemos visto que este espacio puede ser visto como un espacio de representación para G y que, de hecho, toda representación irreducible V^i aparece como subrepresentación en $\mathcal{F}(G)$, con una multiplicidad que coincide con su dimensión: $\mathcal{F}(G) \cong \bigoplus_i n_i V^i$.

Podemos ganar mucha más información acerca de las representaciones (y de la estructura misma) de G si dotamos al espacio $\mathcal{F}(G)$ de un producto que, como veremos a continuación, es inducido naturalmente por la multiplicación en G.

Notemos que sobre $\mathcal{F}(G)$ hay un producto, definido "punto a punto":

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(G) \times \mathcal{F}(G) &\longrightarrow \mathcal{F}(G) \\
(f_1, f_2) &\longmapsto f_1 \cdot f_2, \quad f_1 \cdot f_2(g) := f_1(g) f_2(g).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Este es el producto usual de funciones (que es conmutativo) y <u>no</u> es el producto en el que estamos interesados. El producto que nos interesa puede ser considerado un "producto de convolución", que es no-conmutativo.

Como motivación, pensemos en los elementos de G (que es un conjunto finito) como si fueran los elementos de la base de un cierto espacio vectorial. Si denotamos los elementos de G como $g_1, g_2, \ldots, g_N$, con $N = |G|$, entonces un vector arbitrario en este "espacio vectorial" sería una combinación lineal de la forma

$$\vec{v} = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_N g_N, \tag{2}$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ (si queremos un espacio vectorial complejo)

Por otro lado, podríamos aprovechar el producto en el grupo para definir un "producto" entre dos de estos vectores. De hecho, dado que el producto de g_i con g_j debe ser algún g_k $\quad (g_i g_j = g_k)$, podemos pensar en una multiplicación "formal" de dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (que ya de por sí son combinaciones lineales "formales" de los elementos de G), de la siguiente forma:

Para $\vec{v} = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_N g_N$, $\quad \vec{w} = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots + \mu_N g_N$,

consideremos

$$\vec{v} * \vec{w} = \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i g_i\right) * \left(\sum_{j=1}^{N} \mu_j g_j\right) := \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_i \mu_j \, g_i g_j \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k g_k ,$$

donde en el último paso usamos el hecho de que el producto $g_i g_j$ tiene que ser igual a uno (y solo uno) de los elementos de G. Está claro, entonces, que la regla de multiplicación en G definirá los coeficientes α_k, en función del conjunto completo de coeficientes $\{\lambda_i\}_i$, $\{\mu_j\}_j$.

Una mejor forma de obtener la regla de multiplicación resultante es usar los elementos mismos de G como índices. Consideremos entonces sumas formales

$$a = \sum_{g \in G} a_g \, g , \qquad b = \sum_{h \in G} b_h \, h , \quad \text{para } a_g, b_h \in \mathbb{C}. \qquad (3)$$

El producto se puede calcular así:

$$a * b = \Big(\sum_{g \in G} a_g \, g\Big) * \Big(\sum_{h \in G} b_h \, h\Big) := \sum_{g,h \in G} a_g b_h \underbrace{(gh)}_{\in G} \overset{gh = \tilde{g} \; (\leftrightarrow g = \tilde{g} h^{-1})}{=} \sum_{\tilde{g}, h \in G} a_{\tilde{g} h^{-1}} b_h \, \tilde{g}$$

$$= \sum_{\tilde{g} \in G} \Big(\sum_{h \in G} a_{\tilde{g} h^{-1}} b_h \Big) \tilde{g} . \qquad (4)$$

Para hacer esta idea más precisa, basta con caer en cuenta que un "vector" de la forma $\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i g_i$, o una suma como $a = \sum_{g \in G} a_g g$ no es otra cosa que una función sobre G. Esto tiene sentido, ya que $\mathcal{F}(G)$ mismo es un espacio vectorial. Si $a \in \mathcal{F}(G)$, entonces al evaluar la función "a" sobre el "punto" $g \in G$ obtenemos un escalar $a(g) \in \mathbb{C}$, que no es otra casa que el coeficiente a_g del que hicimos uso en la página anterior.

Además de esto, podemos darle un significado preciso a las sumas formales como en (2) o en (3), si hacemos uso de las "funciones base" δ_g (similares a las consideradas anteriormente) definidas así:

$$\delta_g(h) := \begin{cases} 1, & g=h \\ 0, & g \neq h \end{cases}$$

De esta forma, toda función $a \in \mathcal{F}(G)$ se puede escribir de manera única como

$$a = \sum_{g\in G} a(g)\,\delta_g.$$

Si ahora definimos $\delta_g * \delta_h := \delta_{gh}$, obtendremos (repitiendo el mismo cálculo de arriba):

$$a * b = \Big(\sum_{g\in G} a(g)\,\delta_g\Big) * \Big(\sum_{h\in G} b(h)\,\delta_h\Big) \overset{\text{imponemos linealidad sobre "}*\text{"}}{=} \sum_{g,h\in G} a(g)\,b(h)\,\delta_g * \delta_h$$

$$= \sum_{g,h\in G} a(g)\,b(h)\,\delta_{gh} = \sum_{g\in G}\Big(\sum_{h\in G} a(gh^{-1})\,b(h)\Big)\delta_g$$

<u>Definición</u> (Álgebra de grupo).

El álgebra de grupo $\mathcal{A}(G)$ es el álgebra asociativa obtenida a partir de $\mathcal{F}(G)$, usando como producto el producto de convolución definido así:

$\rightarrow$ para $a, b \in \mathcal{F}(G)$, $\quad a*b\,(g) := \sum_{h\in G} a(gh^{-1})\,b(h)$

$\mathcal{A}(G) = (\mathcal{F}(G), *) \rightarrow$ el álgebra de grupo es el espacio de funciones sobre G, dotada del producto "$*$".

- El álgebra de grupo es además un álgebra involutiva, con involución $a \mapsto a^*$ definida como $a^*(g) := \overline{a(g^{-1})}$.
- Recordemos que una involución en un álgebra compleja $\mathcal{A}$ es un mapa

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ a &\longmapsto a^* \end{aligned}$$

con las siguientes propiedades: (i) $(a^*)^* = a \quad \forall a \in \mathcal{A}$

(ii) $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*, \quad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}, a, b \in \mathcal{A}$

(iii) $(ab)^* = b^* a^*$

→ Ejemplo: Si $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, el álgebra de matrices $n \times n$ con entradas complejas, entonces $A^* = A^\dagger$ (matriz adjunta) es una involución.

Teorema Sean G un grupo finito y $U : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid T \text{ lineal, unitario}\}$ una representación unitaria de G en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, con producto interior $\langle \,,\, \rangle$. Para $a \in \mathcal{A}(G)$, definir

$$U_{\mathcal{A}}(a) = \sum_{g \in G} a(g)\, U(g) \qquad (5)$$

Entonces $U_{\mathcal{A}}$ satisface:

(i) $U_{\mathcal{A}}(a+b) = U_{\mathcal{A}}(a) + U_{\mathcal{A}}(b)$

(ii) $U_{\mathcal{A}}(a * b) = U_{\mathcal{A}}(a)\, U_{\mathcal{A}}(b)$

(iii) $U_{\mathcal{A}}(a^*) = U_{\mathcal{A}}(a)^*$

(iv) $U_{\mathcal{A}}(\delta_e) = id_{\mathcal{H}}$.

Igualmente, si $U_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) =$ "operadores acotados en $\mathcal{H}$" satisface (i) - (iv), entonces existe una representación unitaria U de G que satisface la ec. (5).

Dem. (i) es evidente. (ii) se muestra usando el mismo cálculo que usamos para definir el producto $a * b$, teniendo en cuenta que $U(g)U(h) = U(gh)$.

En (iii), la relación $U_{\mathcal{A}}(a^*) = U_{\mathcal{A}}(a)^*$ nos dice que la involución en $\mathcal{A}(G)$ es llevada a la involución en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Es decir, que $U_{\mathcal{A}}(a^*)$ debe ser el operador adjunto de $U_{\mathcal{A}}(a)$. Verifiquemos esto:

$$\langle x, U_{\mathcal{A}}(a^*) y \rangle = \langle x, \sum_{g\in G} a^*(g) U(g) y \rangle = \sum_{g\in G} \langle x, \overline{a(g^{-1})}\, U(g) y \rangle = \sum_{g\in G} \overline{a(g^{-1})} \langle x, U(g) y \rangle .$$

Por otro lado,

$$\langle U_{\mathcal{A}}(a) x, y \rangle = \langle \sum_{g\in G} a(g) U(g) x, y \rangle = \sum_{g\in G} \overline{a(g)} \langle U(g) x, y \rangle$$

$$= \sum_{g\in G} \overline{a(g)} \langle \underbrace{U(g^{-1}) U(g)}_{= id_{\mathcal{H}}} x, U(g^{-1}) y \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad U_{\mathcal{A}}(a^*) = U_{\mathcal{A}}(a)^* .$$

Supongamos ahora que $U_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ satisface las condiciones (i) - (iv).

Podemos definir $U(g) := U_{\mathcal{A}}(\delta_g)$. Se trata de un homomorfismo, ya que

$$U(g) U(h) = U_{\mathcal{A}}(\delta_g) U_{\mathcal{A}}(\delta_h) \overset{(ii)}{=} U_{\mathcal{A}}(\delta_g * \delta_h) = U_{\mathcal{A}}(\delta_{gh}) = U(gh).$$

Además, $U(g)$ es un operador unitario, ya que $\delta_g^* = \delta_{g^{-1}}$, y por lo tanto

$$U(g)^* \equiv U_{\mathcal{A}}(\delta_g)^* \overset{(iii)}{=} U_{\mathcal{A}}(\delta_g^*) = U_{\mathcal{A}}(\delta_{g^{-1}}) = U(g^{-1}) \underset{\substack{\uparrow \\ U \text{ es homomorfismo}}}{=} U(g)^{-1}.$$

La representación regular ρ^G discutida previamente se puede obtener a partir de una representación natural que podemos definir sobre $\mathcal{A}(G)$.

¿Qué representación podríamos definir para $\mathcal{A}(G)$, que sea "natural"?

$\rightarrow$ En el caso de $\mathcal{A}(G)$, se trata de un álgebra, así que buscamos mapas

$\pi : \mathcal{A}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que sean homomorfismos: $\pi(a*b) \overset{!}{=} \pi(a)\pi(b)$.

Además, de esto, dado que $\mathcal{A}(G)$ es involutiva, quisiéramos que π preservara la involución: $\pi(a^*) \overset{!}{=} \pi(a)^*$. Como $\pi(a)^*$ es el operador adjunto de $\pi(a)$, es importante tener control sobre el producto interior $\langle , \rangle$ en $\mathcal{H}$.

$\rightarrow$ Para construir una representación $\pi : \mathcal{A}(G) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, necesitamos:

- Un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\, ,\rangle)$.
- Un homomorfismo $\pi : \mathcal{A}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Como lo único que tenemos a nuestra disposición es el álgebra $\mathcal{A}(G)$, nos debemos preguntar cómo hacer para relacionar $\mathcal{A}(G)$ con algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Ahora: $\mathcal{A}(G)$, al ser un álgebra, es un espacio vectorial. Si dotamos a $\mathcal{A}(G)$ de un producto interior adecuado, tendríamos un espacio de Hilbert. Pero como espacio vectorial, $\mathcal{A}(G)$ no es otra cosa que el espacio $F(G)$ sobre el cual habíamos ya introducido un producto interior (pág. 26):

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{a(g)}\, b(g).$$

Tendríamos entonces $\mathcal{H} = (\mathcal{A}(G), \langle\, ,\rangle)$. Y el mapa π? Pues $\mathcal{A}(G)$ está jugando el doble papel de álgebra y de espacio de representación, así que es natural usar el producto en $\mathcal{A}(G)$ para definir π:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(G) \times \mathcal{A}(G) &\longrightarrow \mathcal{A}(G) \\ a \;,\; b \;&\longmapsto \pi(a)\, b := a * b \end{aligned}$$

i.e. vemos a $a \in \mathcal{A}(G)$ como un "operador" que actúa sobre "vectores" del espacio de Hilbert $\mathcal{H} = (\mathcal{A}(G), \langle\, ,\rangle)$.

La pregunta es si π, así definido, satisface las propiedades (i) - (iv).

(i) y (ii) son inmediatos, ya que

$$\pi(a+b)c = (a+b)*c = a*c + b*c = \pi(a)c + \pi(b)c \quad \text{, así como}$$

$$\pi(a*b)c = (a*b)*c = a*(b*c) = \pi(a)\left(\pi(b)c\right) \longrightarrow \pi(a*b) = \pi(a)\pi(b).$$

(iii) requiere hacer uso explícito del producto interior:

$$\pi(a^*) = \pi(a)^* \iff \langle \pi(a^*)b, c\rangle = \langle b, \pi(a)c\rangle \quad \forall\, a,b,c \in \mathcal{A}(G).$$

- $\displaystyle \langle b, \pi(a)c\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{b(g)}\,(\pi\underbrace{(a)c}_{=a*c})(g)$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{b(g)} \sum_{h\in G} a(gh^{-1})c(h)$$

- $\displaystyle \langle \pi(a^*)b, c\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{(\pi(a^*)b)(g)}\; c(g)$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{(a^* * b)(g)}\; c(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g,h\in G} \overline{a^*(gh^{-1})}\;\overline{b(h)}\; c(g)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g,h\in G} a(hg^{-1})\,\overline{b(h)}\,c(g).$$

$\Rightarrow \quad \pi(a)^* = \pi(a^*)$.

$\longrightarrow$ ¿Cuál es la representación unitaria U que corresponde a π ?

Según la demostración del teorema, debemos definir

$$U(g) = \pi(\delta_g).$$

Sea $a \in \mathcal{A}(G)$, entonces tenemos

$$(U(g)a)(x) = (\pi(\delta_g)a)(x) = (\delta_g * a)(x) = \sum_{h\in G} \delta_g(xh^{-1})a(h) = a(g^{-1}x).$$

$h = g^{-1}x$

$xh^{-1} = g \longrightarrow x = gh$

$\Rightarrow U(g)$ es la representación regular que habíamos ya estudiado! $\rightarrow U(g) \equiv \rho^G$ (cf. §7).

Tenemos una versión del lema de Schor adaptada a representaciones del álgebra de grupo, $\mathcal{A}(G)$.

Lema de Schur (versión para $\mathcal{A}(G)$).

Sea π una representación irreducible de $\mathcal{A}(G)$ en $\mathcal{H}$ (esp. de Hilbert).

Sea $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineal tal que

$$T \circ \pi(a) = \pi(a) \circ T \quad \forall\, a \in \mathcal{A}(G).$$

Entonces $T = \lambda\, id_{\mathcal{H}}$.

Dem. $\to$ cf. Simon, thm. II.4.1

—— // ——

Notación:

$\hat{G}$: conjunto de las "clases de equivalencia de representaciones irred. de G"

Usamos un índice como "α" para indicar $\alpha \in \hat{G}$. Es decir, α denota una de las representaciones irreducibles $\to \rho^\alpha : G \to Gl(V^\alpha)$, $n_\alpha = \dim V^\alpha$.

Denotemos con $D_{ij}^{(\alpha)}(g)$ al elemento i,j de la matriz de representación de $\rho^\alpha(g)$ una base dada.

Las relaciones de ortogonalidad toman la forma:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}\, D_{k\ell}^{(\beta)}(g) = \frac{1}{n_\alpha} \delta_{\alpha\beta}\, \delta_{ik}\, \delta_{j\ell}$$

Teorema El conjunto $\{\sqrt{n_\alpha}\, D_{ij}^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \hat{G};\, i,j \in \{1,\dots,n_\alpha\}}$ es una base ortonormal para $(\mathcal{F}(G), \langle\, ,\, \rangle)$.

Dem $\to$ c.f. thm III.1.3 en Simon

Nótese que para α fijo tenemos n_α^2 funciones, $D_{ij}^{(\alpha)}$, $i,j \in \{1,\dots,n_\alpha\}$, así que el teorema da razón de la fórmula siguiente (que hemos ya demostrado):

$$|G| = \dim \mathcal{F}(G) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} n_\alpha^2.$$

Cabe preguntarse qué sucede con estas funciones si las consideramos como elementos de $\mathcal{A}(G)$. Ciertamente, al formar una base, debe ser posible expresar cualquier producto de convolución como $D_{ij}^{(\alpha)} * D_{kl}^{(\beta)}$ como una combinación lineal de los elementos de la base.

<u>Teorema</u> Definir $X_{ij}^{(\alpha)} := \frac{n_\alpha}{|G|} D_{ij}^{(\alpha)} \in \mathcal{A}(G)$. Entonces se tiene:

$$\boxed{X_{ij}^{(\alpha)} * X_{kl}^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}\, \delta_{jk}\, X_{il}^{(\alpha)}} \qquad (6)$$

<u>Dem</u> $\longrightarrow$ <u>Ejercicio</u>

Observación: Sea $\{|n\rangle\}_n$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert (dim. fin.)

$\rightarrow$ Si definimos operadores $e_{nm} := |n\rangle\langle m|$, entonces claramente tendremos

$$e_{nm}\, e_{kl} = \delta_{mk}\, e_{nl} \,,$$

que es justamente (6) para $\alpha = \beta$. En particular e_{nn} es un proyector $\longrightarrow (e_{nn})^2 = e_{nn}$

Esto da lugar al siguiente teorema, cuya demostración se deja como <u>ejercicio 10.2</u>

<u>Teorema</u> Existe un isomorfismo de álgebras involutivas

$$\boxed{\mathcal{A}(G) \cong \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n_\alpha}) \equiv \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} M_{n_\alpha}(\mathbb{C})} \qquad (7)$$

Ayuda: la observación anterior, junto con (6) sugieren definir

$$\Phi : \mathcal{A}(G) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} M_{n_\alpha}(\mathbb{C}) \,, \quad f \longmapsto \Phi(f) \,, \quad \Phi_\alpha(f) = \sum_{g \in G} D^{(\alpha)}(g) f(g)$$

$$\rightsquigarrow \Phi(f * g) = \Phi(f)\, \Phi(g).$$