§6. Caracteres

A partir del lema de Schur hemos obtenido, para $\rho: G \longrightarrow Gl(V)$, $n = \dim V$, ρ: repn. irred., la siguiente identidad:

$$\frac{n}{|G|} \sum_{a \in G} \left(\rho(a)\right)_{ij} \left(\overline{\rho(a)}\right)_{\ell k} = \delta_{i\ell}\, \delta_{jk}.$$

$f: G \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad \langle f_1, f_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f_1(a) \overline{f_2(a)}$ (producto interior)

- Si usamos índices griegos "α" para indexar las representaciones irreducibles de G, como $\rho^\alpha : G \longrightarrow Gl(V^\alpha)$, $n_\alpha := \dim V^\alpha$, entonces podemos resumir el resultado de la clase anterior con la siguiente fórmula:

$$\boxed{\langle \rho^\alpha_{ij}, \rho^\beta_{k\ell} \rangle = \frac{1}{n_\alpha} \delta_{\alpha,\beta}\, \delta_{i,k}\, \delta_{j,\ell}}$$

Esto se obtuvo, básicamente, como una consecuencia del lema de Schur:

$\longrightarrow$ Para $T \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$, se tiene:

i) $T \neq 0 \Rightarrow \rho_1 \sim \rho_2$

ii) $\rho_1 = \rho_2 \quad \Longrightarrow \quad T = \lambda\, \mathrm{id}_V$
$(V_1 = V_2 \equiv V)$

Observemos ahora que, dadas dos representaciones $\rho_i : G \rightarrow Gl(V_i)$, $i = 1, 2$, las 3 representaciones "derivadas" que hemos definido, y que hemos denotado como $\rho_1 \oplus \rho_2$, $\rho_1 \otimes \rho_2$ y $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)$, corresponden a la acción "natural" de G en los espacios $V_1 \oplus V_2$, $V_1 \otimes V_2$ y $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, respectivamente. Por otro lado, estos 3 espacios, i.e., la <u>suma directa</u> $V_1 \oplus V_2$, el <u>producto tensorial</u> $V_1 \otimes V_2$, y el espacio (vectorial) de las transformaciones lineales de V_1 en V_2, $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, están a su vez asociados de manera natural a V_1 y V_2. En lenguaje matemático, podemos decir que se trata de propiedades "funtoriales".

Esquemáticamente, podemos resumir esto de la siguiente forma:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & V_1 \oplus V_2 \\
V_1, V_2 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & V_1 \otimes V_3 \\
 & \mathrm{Hom}(V_1, V_2) = \{ S : V_1 \to V_2 \mid S \text{ lineal} \}
\end{tikzcd}
$$

- $\rho_1 \oplus \rho_2 (g) : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$

$$(v_1, v_2) \longmapsto (\rho_1(g) v_1, \rho_2(g) v_2)$$

- $\rho_1 \otimes \rho_2 (g) : V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_1 \otimes V_2$

$$v_1 \otimes v_2 \longmapsto \rho_1(g) v_1 \otimes \rho_2(g) v_2$$

- $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g) : \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$

$$S \longmapsto \rho_2(g) \circ S \circ \rho_1(g^{-1})$$

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "S"'] & V_1 \arrow[d, dashed] \\
V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"'] & V_2
\end{tikzcd}
\qquad
\text{"} g \cdot S \text{"} := \rho_2(g) \circ S \circ \underbrace{\rho_1(g)^{-1}}_{= \rho_1(g^{-1})} .
$$

<u>Definición</u> (Caracter)

Sea $\rho : G \to Gl(V)$ una representación $(|G|, \dim V < \infty)$.

La función $\chi^\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama el <u>caracter</u> de la repn. ρ.

$$g \longmapsto \mathrm{tr}(\rho(g))$$

Los caracteres son funciones definidas sobre el grupo, con propiedades especiales. Entre ellas:

(1) $\chi^\rho(ghg^{-1}) = \chi^\rho(h)$, $\forall g,h\in G$ (constantes sobre clases de conjugación)

(2) $\chi^\rho(g^{-1}) = \overline{\chi^\rho(g)}$, para representaciones unitarias.

(3) $\chi^{\rho_1\oplus\rho_2} = \chi^{\rho_1} + \chi^{\rho_2}$

(4) ρ^α, ρ^β: irred. e $\underset{}{\overset{(\alpha\neq\beta)}{\text{inequiv}}}$ $\Longrightarrow$ $\langle\chi^\alpha, \chi^\beta\rangle = 0$ (Ejercicio 6.1)

(5) ρ irred. $\Longleftrightarrow$ $\langle\chi^\rho,\chi^\rho\rangle = 1$ ("$\Longrightarrow$": Ejercicio 6.2)

(6) $\chi^{\rho_1} = \chi^{\rho_2} \Longleftrightarrow \rho_1\sim\rho_2$ ("$\Longleftarrow$" es directo: $tr(AB) = tr(BA)$)

Nos concentraremos en (5), "$\Longleftarrow$" y en (6), "$\Longrightarrow$"

$\longrightarrow$ Tomemos una repn. $\rho: G\longrightarrow Gl(V)$. Hemos ya mostrado que ρ se puede descomponer en una suma de irreducibles: $\rho\sim\rho_1\oplus\rho_2\oplus\cdots\oplus\rho_k$ (cada ρ_i irred.).

Entonces, (3) $\Longrightarrow$ $\chi^\rho = \chi^{\rho_1} + \dots + \chi^{\rho_k}$.

Ahora, sea "s" cualquier representación irreducible, con caracter χ^s.

Tenemos
$$\langle\chi^\rho,\chi^s\rangle = \langle\chi^{\rho_1}+\cdots+\chi^{\rho_k},\chi^s\rangle$$
$$= \langle\chi^{\rho_1},\chi^s\rangle + \cdots + \langle\chi^{\rho_k},\chi^s\rangle.$$

Por otro lado, tenemos:
$$\langle\chi^{\rho_i},\chi^s\rangle = \begin{cases} 0 \ , & \text{si } \rho_i\not\sim s \quad (\text{por } (4)) \\ 1 \ , & \text{si } \rho_i\sim s \quad (\text{por } (5) \text{ y } (6) \text{"}\Longleftarrow\text{"}) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\langle\chi^\rho,\chi^s\rangle = \text{"multiplicidad de } s \text{ en } \rho\text{"}}$ $(*)$

↳ i.e. número de irreducibles en la descomposición de ρ que son isomorfas a s.

Ahora, sean ρ y r dos representaciones, con descomposiciones
$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_\ell$ y $r = r_1 \oplus \cdots \oplus r_k$ en irreducibles.

Entonces tenemos: $\chi^\rho = \chi^{\rho_1} + \cdots + \chi^{\rho_\ell}$ (i)

$\chi^r = \chi^{r_1} + \cdots + \chi^{r_k}$ (ii)

De las relaciones de ortogonalidad se sigue que, si $\chi^\rho = \chi^r$, entonces las descomposiciones (i) y (ii) deben ser exactamente las mismas, y debemos concluir que $\rho \sim r$ (esto es $\underline{(6), \text{"}\Rightarrow\text{"}}$).

Es fácil ver que, para ρ una repn. cualquiera, χ^ρ debe ser de la forma

$$\chi^\rho = m_1 \chi_1 + \cdots + m_k \chi_k$$

multipl. carac. de una irrep.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle \chi^\rho, \chi^\rho \rangle = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2}$$

"suma de los cuadrados de las multiplicidades"

En particular, $\langle \chi^\rho, \chi^\rho \rangle = 1 \Rightarrow \rho$ irreducible.

(esto es $\underline{(5), \text{"}\Leftarrow\text{"}}$)

<u>Proposición</u> $\rho : G \to Gl(V)$, una repn. $(|G|, \dim V < \infty)$. Entonces:

$$\boxed{\dim \mathrm{Hom}_G(V, V) = m_1^2 + \cdots + m_k^2}$$

Denotemos con (ρ^i, V^i) las diferentes representaciones irreducibles.

Sea $r : G \to Gl(W)$ una representación. Al reducir W obtenemos $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_\ell$, donde cada W_i es irreducible (así que $W_i \cong V_j$, para algún j) $\rightarrow$ como se pueden repetir, tenemos $W = m_1 V^1 \oplus m_2 V^2 \oplus \cdots \oplus m_k V^k$

$$\searrow \mathrm{Hom}_G(W, V^i) = \underbrace{\mathrm{Hom}_G(W_1, V^i)}_{\dim = \begin{cases} 0 & (\text{si } \not\sim) \\ 1 & (\text{si } \sim) \end{cases}} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_G(W_k, V^i) \underset{\text{Schur}}{\cong} \mathbb{C}^{m_i}$$

$\Longrightarrow \dim(\mathrm{Hom}_G(W,V^i)) = m_i = \langle \chi^r, \chi^{\rho^i} \rangle$

$\longrightarrow$ de aquí es fácil obtener el resultado que se busca, descomponiendo $\mathrm{Hom}_G(V,V)$ en "piezas" de la forma $\mathrm{Hom}_G(V^i,V^j) \to \dim = \delta_{ij}$

—————— // ——————

M: conjunto finito, $|M| = n$.

Definir $\mathcal{F}(M) = \{ f: M \to \mathbb{C} \}$. Está claro que $\mathcal{F}(M) \cong \mathbb{C}^n$.

Funciones "base":

$$x \in M \longrightarrow \delta_x : M \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$y \longmapsto \delta_x(y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

Suponer que M es un G-conjunto: $\exists$ acción $G \times M \to M$.

Tenemos una acción inducida en $\mathcal{F}(M)$, dada por

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x), \text{ para } f \in \mathcal{F}(M),\ g \in G,\ x \in M.$$

acción en $\mathcal{F}(M)$. acción en M

Ejercicio 6.3 Mostrar que $\boxed{g \cdot \delta_x = \delta_{g \cdot x}}$

La acción así inducida sobre $\mathcal{F}(M)$ es, de hecho, una representación, que denotaremos ρ^M.

$$\rho^M : G \longrightarrow Gl(\mathcal{F}(M))$$
$$g \longmapsto \rho^M(g) : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$
$$f \longmapsto \rho^M(g) f \equiv g \cdot f,$$
$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

- ¿Cómo son los caracteres de dicha representación? $\longrightarrow$

Proposición. $\chi^{\rho^M}(a) = |M_a| = \#$ de puntos fijos de a $(a \in G)$.

(Recordar que $M_a = \{ m \in M \mid a \cdot m = m \}$)

Demostración

$\longrightarrow$ Ejercicio 6.4.

Ayuda: el cálculo de $\operatorname{tr} \rho^M(a)$ se puede hacer fácilmente en la base $\{\delta_x\}_{x \in M}$.