§10. Tablas de Caracteres

Hemos aprendido que el número de irreps. de un grupo finito coincide con el numero de clases de conjugación. Resultará útil, por lo tanto, construir "tablas de caracteres", donde tengamos información sobre el valor que asume cada uno de los caracteres irreducibles sobre las diferentes clases de conjugación.

Conocer la tabla de caracteres permite, por ejemplo, encontrar la descomposición en irreducibles de un producto directo (i.e., tensorial) de dos irreducibles.

Ilustraremos estas ideas a través de un ejemplo explícito, con el grupo S_3.

$\longrightarrow$ Recordemos la tabla de multiplicación de S :

	e	σ_1	σ_2	σ_3	τ	ρ
e	e	σ_1	σ_2	σ_3	τ	ρ
σ_1	σ_1	e	τ	ρ	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	ρ	e	τ	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	τ	ρ	e	σ_1	σ_2
τ	τ	σ_3	σ_1	σ_2	ρ	e
ρ	ρ	σ_2	σ_3	σ_1	e	τ

Usaremos la notación "C_i" para las clases de conjugación. Conociendo la tabla de multiplicación, podemos calcularlas:

- La clase de la identidad: como la acción es $x \overset{a}{\mapsto} axa^{-1}$, esta clase contiene un solo elemento

  $\longrightarrow$ $C_1 = \{e\}$ (1-elemento)

- La clase de σ_1. Tenemos los siguientes productos:

$\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \tau = \sigma_3$

$\sigma_3 \sigma_1 \sigma_3^{-1} = \sigma_3 \rho = \sigma_2$ $\longrightarrow$ $C_2 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ (3-elementos)

$\tau \sigma_1 \tau^{-1} = \tau \sigma_1 \rho = \tau \sigma_3 = \sigma_2$

$\rho \sigma_1 \rho^{-1} = \rho \sigma_2 = \sigma_3$

- La clase de τ:

$\sigma_i \tau \sigma_i^{-1} = \rho$ $(i=1,2,3)$

$\rho \tau \rho^{-1} = \rho$ $\longrightarrow$ $C_3 = \{\tau, \rho\}$ (2-elementos)

Tenemos en total 3 clases de conjugación:

- $C_1 = \{e\}$ 1-elemento
- $C_2 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 3-elementos $\longrightarrow$
- $C_3 = \{\tau, \rho\}$ 2-elementos.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ |S_3| = 6}}{6}\, S_3 : \underset{\substack{\uparrow \\ |C_1|=1}}{1C_1} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ |C_2|=3}}{3C_2} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ |C_3|=2.}}{2C_3}$$

Debemos tener, por lo tanto, 3 irrepns.

Denotemos con n_1, n_2 y n_3 las respectivas dimensiones. Estas deben satisfacer

$$|S_3| = 6 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2.$$

Es fácil ver que la única forma de satisfacer esta identidad es tomando

$n_1 = 1$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 2$ (salvo el orden de los índices).

Así que debemos buscar 2 repns. irreducibles, inequivalentes, de dimensión 1 y una tercera de dimensión 2. Por fortuna, este ejemplo es suficientemente sencillo, de tal forma que estas se pueden obtener fácilmente.

<u>Notación:</u> $\alpha \in \hat{S}_3$: $|\hat{S}_3| = 3 \rightarrow \alpha = 1, 2, 3.$

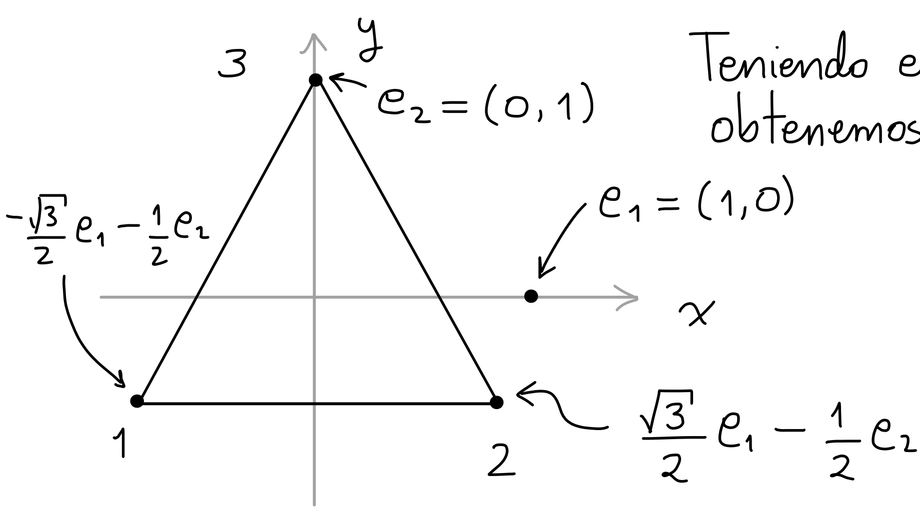
$\{e_i\}_i$: Base para V^α; $\rho^\alpha : S_3 \longrightarrow Gl(V^\alpha)$; $\rho^\alpha(g) e_i = \sum_j D^{(\alpha)}_{ji}(g) e_j$

$\hookrightarrow D^{(\alpha)}(g)$: matriz de repn. en la base $\{e_i\}_i$

$\longrightarrow \chi^\alpha(g) = \mathrm{tr}\, D^{(\alpha)}(g).$

- $\underline{\underline{\rho^1}}$: La representación trivial. $D^{(1)}(g) = 1 \in \mathbb{C}$ $\forall g \in S_3 \Rightarrow \chi^1(g) = 1$ $\forall g$.

- $\underline{\underline{\rho^2}}$: Teniendo en cuenta el origen de este grupo como grupo de simetrías de un triángulo equilátero, tenemos una forma fácil de construir ρ^2



Teniendo en cuenta el significado geométrico de S_3, obtenemos:

$$D^{(2)}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} ; \quad D^{(2)}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)}(\sigma_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D^{(2)}(\tau) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad ; \quad D^{(2)}(\rho) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Con esto podemos obtener el caracter χ^2. Teniendo en cuenta que $\mathrm{tr}\left(D^{(2)}(\sigma_i)\right) = 0 \ (i=1,2,3)$ y que $\mathrm{tr}\, D^{(2)}(\tau) = \mathrm{tr}\, D^{(2)}(\rho) = -1$, concluímos:

$$\chi^2(e) \equiv \mathrm{tr}\,\rho^2(e) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \ ; \quad \chi^2(\sigma_1) = \chi^2(\sigma_2) = \chi^2(\sigma_3) = 0,$$

$$\chi^2(\rho) = \chi^2(\tau) = -1.$$

Podemos representar esta información, de manera compacta, así:

	$1C_1$	$3C_2$	$2C_3$
χ^2:	2	0	−1

Para constatar que ρ^2 es irreducible (algo que en este caso es evidente!) calculamos el producto $\langle \chi^2, \chi^2 \rangle$:

$$\langle \chi^2, \chi^2 \rangle = \frac{1}{|S_3|} \sum_{g \in S_3} |\chi^2(g)|^2 = \frac{1}{6}\left(4 + 0 + 2\times 1\right) = 1 \Longrightarrow \rho^2 \text{ irred.}$$

- $\underline{\underline{\rho^3}}$: Una última irrep. que podemos construir, también de dimensión uno, se obtiene asignando el valor "+1" a las operaciones que corresponden a rotaciones (e, τ, ρ) y el valor "−1" a las que corresponden a reflexiones $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Como el producto de 2 reflexiones es una rotación, vemos que esta prescripción da lugar a una representación. Claramente tendremos $\chi^3|_{C_1} = 1$, $\chi^3|_{C_2} = -1$, $\chi^3|_{C_3} = -1$, que representaremos nuevamente en forma tabular:

	$1C_1$	$3C_2$	$2C_3$
χ^3:	1	−1	1

Toda la información que hemos obtenido sobre los caracteres puede ahora ser resumida en la forma de la siguiente tabla de caracteres:

$6S_3$	$1C_1$	$3C_2$	$2C_3$
χ^1	1	1	1
χ^2	2	0	−1
χ^3	1	−1	1

- Como primera aplicación, verifiquemos las relaciones de ortogonalidad de los caracteres $\longrightarrow \langle \chi^\alpha, \chi^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

$$\langle \chi^1, \chi^1 \rangle = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3} |C_i| \, \overline{\chi^1(C_i)} \, \chi^1(C_i) = \frac{1}{6} \left(1\cdot 1^2 + 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 \right) = 1$$

$$\langle \chi^2, \chi^2 \rangle = \frac{1}{6} \left(1\cdot 2^2 + 3\cdot 0^2 + 2\cdot(-1)^2 \right) = 1$$

$$\langle \chi^3, \chi^3 \rangle = \frac{1}{6} \left(1\cdot 1^2 + 3\cdot(-1)^2 + 2\cdot 1^2 \right) = 1$$

Por otro lado, para representaciones distintas, tenemos, por ejemplo,

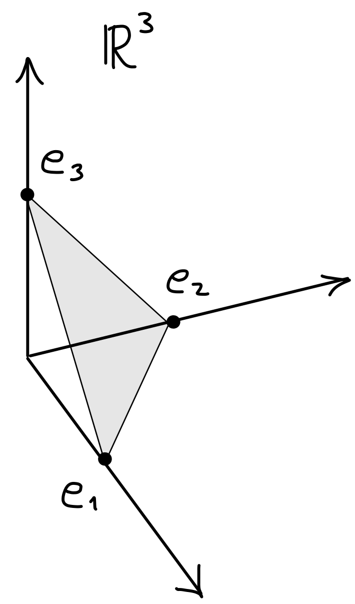
$$\langle \chi^2, \chi^3 \rangle = \frac{1}{6} \left(1\cdot(2\times 1) + 3\cdot(0\times(-1)) + 2\cdot((-1)\times 1) \right) = 0,$$

$$\langle \chi^1, \chi^2 \rangle = \frac{1}{6} \left(1\cdot(1\times 2) + 3\cdot(1\times 0) + 2\cdot(1\times(-1)) \right) = 0,$$

$$\langle \chi^1, \chi^3 \rangle = 0.$$

Usemos ahora la tabla de caracteres para descomponer otras representaciones en irreducibles. Consideremos, por ejemplo, el triángulo equilátero cuyos vértices están dados por los vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1) \quad \longrightarrow$$



Así, por ejemplo, tenemos, para $\sigma_1 = (23)$:

$$\rho(\sigma_1)e_1 = e_1, \quad \rho(\sigma_1)e_2 = e_3, \quad \rho(\sigma_1)e_3 = e_2.$$

$\longrightarrow$ Podemos extender esta acción linealmente a $\mathbb{C}^3$, si consideramos a $\{e_1, e_2, e_3\}$ como base de $\mathbb{C}^3$.

En esta base, la matriz que se obtiene para $\rho(\sigma_1)$ es

$$D(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices correspondientes a los demás elementos de S_3 se obtienen de forma análoga. Como nos interesa el caracter de esta representación, basta con saber que $D(e) = \mathbb{1}_3$ $(\Rightarrow \chi(e) = 3)$ y con calcular $\rho(\tau)$, que da lugar a la matriz

$$D(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, obtenemos $\mathrm{tr}\, D(\sigma_1) = 1$ $\left(\Rightarrow \chi|_{C_2} = 1\right)$ y $\mathrm{tr}\, D(\tau) = 0$ $\left(\Rightarrow \chi|_{C_3} = 0\right)$

Usando las relaciones de ortogonalidad, es ahora muy fácil calcular la multiplicidad de ρ^α en $\rho \longrightarrow m_\alpha = \langle \chi^\alpha, \chi \rangle$.

Un cálculo explícito nos da el siguiente resultado:

$$\langle \chi^1, \chi \rangle = \frac{1}{6}\left(1 \cdot \chi^1(C_1)\chi(C_1) + 3\chi^1(C_2)\chi(C_2) + 2\chi^1(C_3)\chi(C_3)\right)$$

$$= \frac{1}{6}(3 + 3 + 0) = 1,$$

$$\langle \chi^2, \chi \rangle = \frac{1}{6}(2 \times 3 + 0 - 0) = 1,$$

$$\langle \chi^3, \chi \rangle = \frac{1}{6}(3 - 3 + 0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad V \cong V^{(1)} \oplus V^{(2)}$$

Ejemplo. Otro ejemplo del uso de caracteres consiste (para $G = S_3$) en encontrar la descomposición en irreducibles del producto $V^{(2)} \otimes V^{(2)}$. Como esta representación tiene dimensión 4, tenemos automáticamente $\chi(C_1) = 4$. Para las otras dos clases de conjugación usamos $\chi^{\rho^2 \otimes \rho^2} = (\chi^{\rho^2})^2$

$\Rightarrow \quad \chi(C_1) = 4, \; \chi(C_2) = 0, \; \chi(C_3) = 1.$

$\hookrightarrow$ Descomposición en irreducibles:

$\langle \chi^1, \chi \rangle = 1/6\,(4 + 0 + 2) = 1$; $\langle \chi^2, \chi \rangle = 1/6\,(4 \times 2 + 0 + 2 \times (-1) \times 1) = 1$;

$\langle \chi^3, \chi \rangle = 1/6\,(4 + 0 + 2) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{V^{(2)} \otimes V^{(2)} \cong V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus V^{(3)}}$$

Podemos continuar, p. ej.,

con $V^{(2)} \otimes V^{(3)} \rightarrow$ Usando $\chi^{\rho^2 \otimes \rho^3} = \chi^{\rho^2} \chi^{\rho^3}$, obtenemos $\chi(C_1) = 2$, $\chi(C_2) = 0$, $\chi(C_3) = -1$.

$\hookrightarrow \langle \chi^1, \chi \rangle = 1/6\,(2 + 0 - 2) = 0$; $\langle \chi^2, \chi \rangle = 1/6\,(2 \times 2 + 0 + 2 \times (-1)(-1)) = 1$, $\langle \chi^3, \chi \rangle = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{V^{(2)} \otimes V^{(3)} \cong V^{(2)}}$$

Con esto podemos calcular, por ejemplo,

$$\begin{aligned} V^{(2)} \otimes V^{(2)} \otimes V^{(2)} &\cong V^{(2)} \otimes (V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus V^{(3)}) \\ &\cong (V^{(2)} \otimes V^{(1)}) \oplus (V^{(2)} \otimes V^{(2)}) \oplus (V^{(2)} \otimes V^{(3)}) \\ &\cong V^{(2)} \oplus (V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus V^{(3)}) \oplus V^{(2)} \\ &\cong V^{(1)} \oplus 3V^{(2)} \oplus V^{(3)} \end{aligned}$$

Esta última identidad la podemos también obtener usando caracteres:

$\rho := \rho^{(2)} \otimes \rho^{(2)} \otimes \rho^{(2)}$ $(\rightarrow \dim = 8)$ $\Rightarrow \chi(C_1) = 8$, $\chi(C_2) = 0$, $\chi(C_3) = -1$.

Multiplicidades: $\langle \chi^1, \chi \rangle = 1/6\,(8 + 0 - 2) = 1$,

$\langle \chi^2, \chi \rangle = 1/6\,(2 \times 8 + 0 + 2) = 18/6 = 3$,

$\langle \chi^3, \chi \rangle = 1/6\,(8 + 0 - 2) = 1$.

$$\Rightarrow \boxed{V^{(2)} \otimes V^{(2)} \otimes V^{(2)} \cong V^{(1)} \oplus 3V^{(2)} \oplus V^{(3)}}$$