Los axiomas de Wightman

Refs. - Reed & Simon (Fourier analysis and self-adjointness, § IX.8)
- Streater & Wightman (PCT, Spin and Statistics, and All That, cap. 3)
- Moretti (Spectral Theory and Quantum Mechanics)

Siguiendo las referencias mencionadas, en estas notas buscamos formalizar matemáticamente el concepto de campo cuántico como una "distribución con valores en un espacio de operadores". Intuitivamente, un campo cuántico (escalar, por simplicidad) $\varphi(x)$ es un objeto muy singular. Como ya hemos dicho, esto se hace evidente al escribir las relaciones de conmutación canónicas, que de entrada requieren el uso de distribuciones. Esta es una de las razones para introducir la idea de campo "suavizado" ("smeared field") ⟶

Si f es una función test (en $C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ o en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$), buscamos darle significado matemático a la expresión

$$\varphi(f) = \text{``}\int_{\mathbb{R}^4} d^4x \; \varphi(x) f(x)\text{''}.$$

Desde un punto de vista físico también tiene sentido considerar un campo como un objeto que se "evalúa" en funciones test, ya que una medición siempre tendrá que hacer referencia a una <u>región</u> del espacio-tiempo y no a un <u>punto</u>.

Pasemos a la definición de campo cuántico (escalar, real) en la formulación de Wightman.

Por un campo cuántico escalar real (o "hermítico") entenderemos lo siguiente →

$\mathcal{H}$: espacio de Hilbert (separable); U: una representación unitaria del grupo de Poincaré.

$D \subset \mathcal{H}$ → un subespacio denso de $\mathcal{H}$. φ: el "campo cuántico" (ver abajo).

↳ Una cuadrupla $\langle \mathcal{H}, U, \varphi, D\rangle$ que satisfaga las siguientes 8 propiedades se llamará campo cuántico (escalar, real) ⟶

Propiedad 1

$\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable y $U : \mathcal{P} \longrightarrow U(\mathcal{H})$ una representación unitaria del grupo de Poincaré ($\mathcal{P}$). Dicha representación es, además, fuertemente continua.

(operadores unitarios en $\mathcal{H}$)

Observaciones

- Como estamos considerando solo el caso del campo escalar, la representación que nos interesa es la de espín cero. Recordemos que las representaciones unitarias e irreducibles del grupo de Poincaré se pueden "etiquetar" con los valores de m (la masa de las partículas) y de s (el espín). En este caso, escogemos $m > 0$ y $s = 0$.
- Acerca del significado de la expresión "fuertemente continua":

  Para explicar esto debemos comenzar por recordar que el espacio de los operadores lineales acotados puede ser dotados de varias topologías, entre las que se encuentran la topología fuerte, la topología débil y la topología uniforme. Recordemos estas definiciones.

<u>Def</u>. (Espacio de Banach) Un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$ se denomina espacio de Banach si es un espacio completo en la topología inducida por la norma (completo = "toda sucesión de Cauchy converge").

<u>Def</u>. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados. Entonces:

$\mathcal{L}(X,Y) := \{ T : X \to Y \mid T \text{ es lineal} \} \longrightarrow$ el espacio vectorial de las transformaciones lineales de X en Y.

El espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ puede ser dotado de diferentes topologías, aunque no las consideraremos aquí.

Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, decimos que T es un <u>operador acotado</u> si existe $C > 0$ tal que $\forall x \in X$, $\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$

$$\mathcal{B}(X,Y) := \{ T \in \mathcal{L}(X,Y) \mid T \text{ es acotado} \}.$$

Este espacio puede ser dotado de una norma, de la siguiente forma:

Para $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ definimos $\|T\| := \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \infty$

porque $T \in \mathcal{B}(X,Y)$

Dado que $\mathcal{B}(X,Y)$ es, de por sí, un espacio vectorial, tenemos entonces que, con la norma definida arriba (norma de operador), $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|)$ se convierte en un espacio vectorial normado.

<u>Proposición</u>. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio vectorial normado y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio de Banach. Entonces $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Dem $\rightarrow$ ejercicio.

$\rightarrow$ El producto interior $\langle\, , \rangle$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ induce una norma $\|\cdot\|$, definida a través de la relación $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, de tal forma que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. En este caso usamos las notaciones abreviadas $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para denotar los espacios de operadores lineales y lineales acotados, respectivamente, de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$.

<u>Def.</u> Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados. Definimos las siguientes topologías en $\mathcal{B}(X,Y)$:

(i) <u>Topología débil</u>: esta es la topología en $\mathcal{B}(X,Y)$ que es inducida por la siguiente familia de semi-normas: $\{q_{x,\varphi}\}_{\substack{x\in X\\ \varphi\in Y'}}$, donde

$$q_{x,\varphi} : \mathcal{B}(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$T \longmapsto q_{x,\varphi}(T) := |\varphi(T(x))| .$$

Y': dual <u>topológico</u> de Y

(ii) <u>Topología fuerte</u>: la topología en $\mathcal{B}(X,Y)$ inducida por la familia de semi-normas $\{p_x\}_{x\in X}$, donde

$$p_x : \mathcal{B}(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$T \longmapsto p_x(T) := \|T(x)\|_Y$$

(iii) <u>Topología uniforme</u>: es la topología en $\mathcal{B}(X,Y)$ inducida por la norma de operador $\|\cdot\|$ definida, para $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, como $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \dfrac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$.

<u>Observación:</u> Para un espacio vectorial V y una familia de semi-normas $\{q_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en V, definimos el "análogo" de una bola abierta (en el origen) de la siguiente forma:

$$B_{q_\alpha,\varepsilon} = \{ v \in V \mid q_\alpha(v) < \varepsilon \}.$$

La topología en V generada por la familia $\{q_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es aquella cuyos conjuntos abiertos (además de ϕ) son todas las posibles uniones de conjuntos "base" de la forma $\quad v + B_{q_{\alpha_1},\varepsilon_1} \cap B_{q_{\alpha_2},\varepsilon_2} \cap \cdots \cap B_{q_{\alpha_k},\varepsilon_k}$, con $k \in \mathbb{N}$, $v \in V$, $\varepsilon_j > 0$, $\alpha_k \in I$

Nótese que, si $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, tomando como flia de semi-normas al conjunto cuyo único elemento es $\|\cdot\|$ (una norma!) obtenemos la topología usual con abiertos generados por todas $B_\varepsilon(x) = \{ y \in V \mid \|x-y\| < \varepsilon \}$.

<u>Proposición</u>: X: esp. vect., con una familia de semi-normas $\{q_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $q_\alpha : X \to \mathbb{R}$. Sea τ la topología inducida por la flia $\{q_\alpha\}_\alpha$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Entonces la sucesión converge a $x \in X$ si y solo si $q_\alpha(x_n - x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para <u>todo</u> $\alpha \in I$.

<u>Observación</u>: Un conjunto de $\mathcal{B}(X,Y)$ que es abierto en la topología débil también es abierto en la topología fuerte. Para ilustrar este hecho, consideremos el siguiente conjunto, que es abierto en la topología débil: $\quad B_{q_{x,\varphi},\varepsilon} = \{ T \in \mathcal{B}(X,Y) \mid q_{x\varphi}(T) < \varepsilon \}$

Esta es una vecindad (débil) de cero. $T \in B_{q_{x,\varphi},\varepsilon} \iff q_{x\varphi}(T) < \varepsilon \iff |\varphi(T(x))| < \varepsilon$. Ahora, tenemos que $\varphi \in Y'$, i.e., $\varphi : Y \to \mathbb{C}$ es lineal y continuo (acotado), luego $\quad |\varphi(T(x))| \le \|\varphi\| \cdot \|T(x)\|_Y$. Tomemos $\delta > 0$ de tal forma que $\delta < \varepsilon / \|\varphi\|$. Entonces $B_{p_x,\delta} \subset B_{q_{x\varphi},\varepsilon}$. En efecto, $T \in B_{p_x,\delta}$

$\iff p_x(T) < \delta \iff \|T(x)\|_Y < \delta$

$\implies |\varphi(T(x))| \le \|\varphi\| \|T(x)\|_Y \le \|\varphi\| \cdot \delta < \varepsilon \implies T \in B_{q_{x\varphi},\varepsilon}$. Esto quiere decir que cero es un punto interior de $B_{q_{x\varphi},\varepsilon}$ en la <u>topología fuerte</u>. De igual forma podemos mostrar que todos los elementos de $B_{q_{x\varphi},\varepsilon}$ son puntos interiores (respecto a la topología fuerte) y por lo tanto $B_{q_{x\varphi},\varepsilon}$ también es un conjunto abierto para la topología fuerte. De forma similar se muestra que todo abierto en la topología fuerte es también abierto en la topología uniforme. Decimos entonces que la topología fuerte es <u>más fina</u> que la topología débil y que la topología uniforme es más fina que la topología uniforme. Denotando como $\tau_{\text{débil}}$, τ_{fuerte} y τ_{unif} las respectivas topologías, tenemos entonces que

$$\tau_{\text{débil}} \subsetneq \tau_{\text{fuerte}} \subsetneq \tau_{\text{unif}}.$$

Las siguientes proposiciones (cuyas demostraciones dejaremos como ejercicio) nos dan criterios útiles de convergencia.

<u>Proposición:</u> Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ una sucesión. Entonces la sucesión converge <u>débilmente</u> a $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ si y solo si, $\forall \varphi \in Y'$, $\forall x \in X$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(T_n(x)) = T(x).$$

En este caso es usual escribir $T = w\text{-}\lim T_n$. (weak limit)

<u>Proposición:</u> Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ una sucesión. Entonces la sucesión converge <u>fuertemente</u> a $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ si y solo si, $\forall x \in X$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(x) - T(x)\|_Y = 0.$$

En este caso es usual escribir $T = s\text{-}\lim T_n$. (strong limit)

Nótese que $T_n \underset{\text{unif}}{\rightarrow} T \implies T = s\text{-}\lim T_n \implies T = w\text{-}\lim T_n$.

En efecto, si $\|T_n - T\| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, entonces $\|T_n(x) - T(x)\| = \|(T_n - T)(x)\| \leq \|T_n - T\| \cdot \|x\|$ muestra que T_n converge fuertemente a T (es decir, convergencia uniforme implica convergencia fuerte). De forma similar, si $T = s\text{-}\lim T_n$, entonces $\|T(x) - T_n(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\forall x$, luego se tiene que $\forall \varphi \in Y'$, $|\varphi((T_n - T)(x))| \leq \|\varphi\| \|(T_n - T)(x)\| = \|\varphi\| \|T_n(x) - T(x)\| \longrightarrow 0$.

(es decir, convergencia fuerte implica convergencia débil).

—— // ——

Habiendo explicado el significado de "convergencia fuerte", podemos volver a la propiedad 1. Al afirmar que $U : \mathcal{P} \to \mathcal{U}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es fuertemente continua, nos referimos a que U es un mapa continuo, donde $\mathcal{P}$ tiene una topología dada por su estructura de grupo de Lie y $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ la topología inducida por la topología fuerte en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Para poder discutir algunas de las consecuencias de la propiedad 1, debemos presentar algunas definiciones y teoremas adicionales.

Def. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $t \mapsto U(t)$ un grupo unitario a un parámetro, i.e., $U(t)$ es un operador unitario en $\mathcal{H}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Además, se tiene que $U(0) = \mathbb{1}$ y que $U(t+s) = U(t)U(s)$. Nótese que esto implica que $U(t)^* = U(t)^{-1} = U(-t)$. Decimos que la flia $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es fuertemente continua si el mapa $t \mapsto U(t)$ es fuertemente continuo

Proposición. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ un grupo unitario a un parámetro. entonces U es fuertemente continuo si y solo si $\lim_{t\to 0} \langle \psi, U(t)\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Demostración

Asumamos que $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es fuertemente continuo. Como la convergencia fuerte implica convergencia débil, tenemos que $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ también es débilmente continua, en particular, es débilmente continua en $t=0$. Por una proposición anterior, continuidad débil en $t=0$ equivale a la afirmación de que, $\forall \varphi \in \mathcal{H}'$, $x \in \mathcal{H}$, se tiene $\lim_{t\to 0} \varphi((U(t)-U(0))x) = 0$.
Por el teorema de Riesz, todo vector dual $\varphi \in \mathcal{H}'$ puede ser representado por un vector $y_\varphi \in \mathcal{H}$, de tal form que $\varphi(x) = \langle y_\varphi, x \rangle$ $\forall x \in \mathcal{H}$.
Por lo tanto, la continuidad débil en $t=0$ se traduce en la condición

$\lim_{t\to 0} \langle y, U(t)x \rangle = \langle y, x \rangle$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$. Tomando $x = y \equiv \psi$ obtenemos el resultado deseado.

Supongamos ahora que $\lim_{t\to 0} \langle \psi, U(t)\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle$ $\forall \psi \in \mathcal{H}$. Esto implica la convergencia fuerte de $U(t)$ a $\mathbb{1}$: $\text{s-lim}\, U(t) = U(0) \equiv \mathbb{1}$. Veamos:

$$\text{s-}\lim_{t\to 0} U(t) = \mathbb{1} \iff \| U(t)\psi - U(0)\psi \| \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \iff \langle U(t)\psi - \psi, U(t) - \psi \rangle \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Pero $\langle U(t)\psi-\psi, U(t)\psi-\psi\rangle = \underbrace{\langle U(t)\psi, U(t)\psi\rangle}_{=\langle\psi,\psi\rangle \text{ (}U(t)\text{ es unitario)}} - \langle U(t)\psi,\psi\rangle - \langle\psi, U(t)\psi\rangle + \langle\psi,\psi\rangle$

$$= 2\langle\psi,\psi\rangle - \overline{\langle\psi, U(t)\psi\rangle} - \langle\psi, U(t)\psi\rangle \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

(por la conv. débil)

Vemos que, en este caso, convergencia débil y convergencia fuerte de $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ coinciden.

<u>Teorema</u> (Stone) Sea $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ un grupo unitario a un parámetro en $\mathcal{H}$. Entonces existe un operador auto-adjunto $A : D(A) \to \mathcal{H}$ tal que

$U(t) = e^{itA} \quad \forall\, t\in\mathbb{R}$.

$D(A)$: dominio de A (un subespacio <u>denso</u> de $\mathcal{H}$)

<u>Dem</u> cf. Moretti, thm 9.29.

El siguiente teorema es una generalización del teorema de Stone.

<u>Teorema</u> (cf. Reed & Simon, vol I, thm VIII.12) Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert (sep.) y

$$U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$
$$\vec{t} \longmapsto U(\vec{t}) \equiv U(t_1,t_2,\dots,t_n)$$

una familia de operadores unitarios tales que $U(\vec{t})U(\vec{s}) = U(\vec{t}+\vec{s})$ y $U(0) = \mathbb{1}$.

Sea D el conjunto de combinaciones lineales finitas de vectores de la forma

$$\varphi_f = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\, U(\vec{x})\varphi\, d^n\vec{x}, \quad \varphi\in\mathcal{H}, \quad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

($\to$ φ_f es el único vector en $\mathcal{H}$ tal que $\langle\psi,\varphi_f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\langle\psi, U(\vec{x})\varphi\rangle d^n\vec{x}$)

Entonces D es un dominio común para cada uno de los generadores A_j que los hace esencialmente autoadjuntos ($D\subset D(A_j)\ \forall j\in\{1,\dots,n\}$), $A_j : D\to D$.

$[A_i, A_j] = 0 \quad \forall\, i,j$.

Adicionalmente, existe una PVM $P : \underset{\text{Borel}}{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \longrightarrow \underset{\text{Bounded ops}}{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ tq.

$$\langle\varphi, U(\vec{t})\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\vec{t}\cdot\vec{\lambda}}\, d\langle\varphi, P_{\vec{\lambda}}\psi\rangle \qquad \left(U(\vec{t}) = \text{"}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\vec{t}\cdot\vec{\lambda}}\, dP_{\vec{\lambda}}\text{"} \right)$$

En vista del teorema anterior, una consecuencia de la propiedad 1, cuando nos restringimos al subgrupo $(\mathbb{R}^4, +)$ de traslaciones del grupo de Poincaré $\left(\mathcal{P} = L_+^{\uparrow} \rtimes \mathbb{R}^4 \right)$, es la existencia de 4 operadores auto-adjuntos P_0, P_1, P_2, P_3 que conmutan entre sí $([P_\mu, P_\nu] = 0)$ tales que

$$U(\mathbb{1}, a) = e^{ia^\mu P_\mu} = \int_{\mathbb{R}^4} e^{ia^\mu \lambda_\mu} \, dE_\lambda$$

$P_0 \longrightarrow$ Operador de energía (Hamiltoniano) ; P_i $(i = 1,2,3)$: Operadores de momento.

<u>Propiedad 2</u> (Condición espectral)

La PVM $E : \mathrm{Borel}(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ correspondiente a $U(\mathbb{1}, a) = e^{ia_\mu P^\mu}$ tiene soporte en el cono de luz positivo, $\overline{V_+} = \{ x \in \text{Minkowski} \mid x^2 \geq 0, \, x^0 \geq 0 \}$

$\rightarrow$ Esta condición es equivalente a la siguiente afirmación:

Los operadores P_0 y $P_\mu P^\mu$ son ambos positivos.

<u>Propiedad 3</u> (Existencia y unicidad del vacío).

$\exists \; \Psi_0 \in \mathcal{H}$ tal que $U(\Lambda, a) \Psi_0 = \Psi_0 \quad \forall \, (\Lambda, a) \in \mathcal{P}$.

<u>Propiedad 4</u> (Dominio invariante)

Existe un subespacio denso $D \subset \mathcal{H}$ y un mapa $\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($\varphi(f)$ es <u>no</u> acotado $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$) de tal forma que

(i) $\forall \, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, $D \subset D(\varphi(f))$, $D \subset D(\varphi(f)^*)$ y $\varphi(f)^*\big|_D = \varphi(\bar{f})\big|_D$

(ii) $\Psi_0 \in D$ y $\varphi(f) D \subset D \quad \forall \, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$

(iii) Para $\Psi \in D$ fijo, el mapa $f \mapsto \varphi(f)\Psi$ es lineal (i.e. $\varphi(f+g)\Psi = \varphi(f)\Psi + \varphi(g)\Psi$, etc)

Observaciones sobre dominios y def. de "autoadjunto".

Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, el operador adjunto A^* es aquel que satisface $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$

$\forall\, x,y \in \mathcal{H}$. En este caso, decimos que A es auto-adjunto si $A^* = A$.

Si A no es acotado (como ocurre con los operadores $\varphi(f)$), la definición de "auto-adjunto" es más sutil (cf. Moretti, def. 5.12):

<u>Definición</u> Sea $A : D(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador, definido en un dominio $D(A) \subset \mathcal{H}$.

(a) Decimos que A es hermítico si $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ $\underline{\forall\, x,y \in D(A)}$

Si $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, se define A^* como como el operador con dominio

$$D(A^*) := \{ x \in \mathcal{H} \mid \exists\ \xi_{A,x} \in \mathcal{H} \text{ con } \langle x, Ay\rangle = \langle \xi_{A,x} | y\rangle\ \forall\, y \in D(A) \}$$

$$\hookrightarrow \quad \begin{aligned} A^* : D(A^*) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto A^*(x) := \xi_{A,x}. \end{aligned}$$

(b) A es <u>simétrico</u> si

(i) A es hermítico
(ii) $D(A)$ es denso $(\rightarrow \overline{D(A)} = \mathcal{H})$

Nótese que A simétrico implica $A \subset A^*$: $x \in D(A) \Rightarrow Ax \in \mathcal{H}$, luego $\forall y \in D(A)$, tenemos $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, de donde se sigue que $x \in D(A^*)$.

(c) A es auto-adjunto si:

(i) $D(A)$ es denso.
(ii) $A = A^*$

(d) A es esencialmente auto-adjunto si

(i) $D(A)$ denso
(ii) A es "cerrable"
(iii) $\overline{A} = A^*$

gráfico de A.

- A es cerrado si $\Gamma(A)$ es cerrado en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$
- A es "cerrable" si $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(C)$ con C cerrado.

Notación: $C \equiv \overline{A}$

<u>Propiedad 5</u> (Regularidad del campo)

$\forall\, \Psi_1, \Psi_2 \in D$, el mapa $\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \langle \Psi_1, \varphi(f)\Psi_2\rangle \end{aligned}$ es una distribución (temperada)

<u>Propiedad 6</u> (Invarianza de Poincaré) Para todo $(\Lambda, a) \in \mathcal{P} = L_+^\uparrow \rtimes \mathbb{R}^4$ se tiene $U(\Lambda,a)D \subset D$.

Además, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, $\Psi \in D$, se tiene

$$U(\Lambda,a)\,\varphi(f)\,U(\Lambda,a)^{-1}\Psi = \varphi\big((\Lambda,a)\cdot f\big)\Psi$$

(en otras palabras: se trata de una representación de espín cero).

Propiedad 7 (micro-causalidad).

Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ tienen soportes causalmente disyuntos ($\text{supp} f \sim \text{supp} g$), entonces $[\varphi(f), \varphi(g)]\Psi = 0 \quad \forall \Psi \in D$.

Propiedad 8 (ciclicidad del vacío).

El conjunto D_0 generado a partir de combinaciones lineales finitas de la forma

$$\varphi(f_1)\cdots\varphi(f_n)\Psi_0$$

es denso en $\mathcal{H}$.

—— // ——

Def Los valores esperados de la forma

$$\mathcal{W}_n(f_1, f_2, \dots, f_n) := \langle \Psi_0, \varphi(f_1)\varphi(f_2)\cdots\varphi(f_n)\Psi_0 \rangle$$

("vacuum expectation values") se llaman "funciones de Wightman" (o, de forma más correcta, "distribuciones de Wightman"), o también "función de n-puntos".

Observación

Si $g = (\Lambda, a) \in \mathcal{P} = L_+^\uparrow \rtimes \mathbb{R}^4$, la acción de g sobre 4-vectores en el espacio de Minkowski,

$$x \longmapsto gx \equiv (\Lambda, a)x = \Lambda x + a,$$

induce una acción en cualquier espacio de funciones sobre el mismo, en particular sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Esta acción, para ser acción a izquierda, debe ser definida de la siguiente forma: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \ni f \longmapsto g\cdot f$, con $(g\cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$.

Si $g = (\Lambda, a)$, entonces $g\cdot f(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a))$ (esta es la acción que se usa en la propiedad 6).

Recordemos ahora la propiedad 3 $\longrightarrow$ $U(g)\Psi_0 = \Psi_0 \quad \forall g \in \mathcal{P}$, así como la propiedad 6 $\longrightarrow$ $U(g)\varphi(f)U(g)^{-1}\Psi = \varphi(g\cdot f)\Psi$, $\forall \Psi \in D$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$.

Se sigue entonces que, para la función de 2-puntos ($\mathcal{W}_2$), se debe tener:

$$\mathcal{W}_2(f_1,f_2) = \langle \Psi_0, \varphi(f_1)\varphi(f_2)\Psi_0\rangle = \langle U(g)^{-1}\Psi_0, \varphi(f_1)\varphi(f_2)U(g)^{-1}\Psi_0\rangle$$

$$= \langle \Psi_0, U(g)\varphi(f_1)\varphi(f_2)U(g)^{-1}\Psi_0\rangle$$

$$= \langle \Psi_0, (U(g)\varphi(f_1)U(g)^{-1})(U(g)\varphi(f_2)U(g)^{-1})\Psi_0\rangle$$

$$= \langle \Psi_0, \varphi(g\cdot f_1)\varphi(g\cdot f_2)\Psi_0\rangle \equiv \mathcal{W}_2(g\cdot f_1, g\cdot f_2)$$

En particular, si consideramos únicamente traslaciones ($g = (1,a)$) y usando una notación de funciones, podemos ver que $\mathcal{W}_2(x,y)$ es de la forma

$$\mathcal{W}_2(x,y) = W_2(x-y)$$

(aquí, además, hemos usado el teorema nuclear de Schwartz).

De manera análoga se muestra que para la "función" de n-puntos $\mathcal{W}_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})$ existe una distribución $W_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4(n-1)})$ tal que (en notación de funciones) se cumple

$$\mathcal{W}_n(x_1,\dots,x_n) = W_n(x_1-x_2, x_2-x_3, \dots, x_{n-1}-x_n)$$

$\longrightarrow$ Las funciones de Wightman poseen propiedades especiales (como por ejemplo, ser los valores frontera de <u>ciertas</u> funciones analíticas de varias variables definidas sobre <u>ciertas</u> regiones de $\mathbb{C}^{4n}$ llamadas "tubos") que permiten demostrar teoremas como el teorema CPT o el teorema de espín-estadística (cf. Streater & Wightman).