Algunas funciones de Green para el campo escalar

La "función" (distribución) de Pauli-Jordan

$\Delta_0(x) \longrightarrow$ Definida a través de

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = i\,\Delta_0(x)\,.$$

Para obtener su forma explícita, partimos de la expansión del campo en términos de los operadores a_p y a_p^{+}, sujetos a las reglas de conmutación $[a_p, a_q^{+}] = 2E_p\,\delta(\vec{q}-\vec{p})$:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\left(f_p(x)\, a_p + f_p^{*}(x)\, a_p^{+} \right), \qquad f_p(x) = \left.\frac{e^{-ix\cdot p}}{(2\pi)^{3/2}}\right|_{p^0=E_p}$$

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\int\frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\left(f_p(x)\, f_q^{*}(y)\, \underbrace{[a_p, a_q^{+}]}_{2E_p\delta(\vec{p}-\vec{q})} + f_p^{*}(x)\, f_q(y)\, \underbrace{[a_p^{+}, a_q]}_{-2E_p\delta(\vec{p}-\vec{q})} \right)$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\left(e^{-i(E_p x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})}\, e^{i(E_p y^0 - \vec{p}\cdot\vec{y})} - \text{c.c.} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\Delta_0(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\left.\left(e^{-ip\cdot x} - e^{ip\cdot x} \right)\right|_{p^0=E_p}}$$

Las siguientes son algunas de las propiedades de $\Delta_0(x)$:

1) Es una solución (en el sentido de las distribuciones) de la ec. de Klein-Gordon,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Delta_0(x) = 0 ,$$

sujeta a las siguientes condiciones iniciales:

i) $\Delta_0(x^0=0, \vec{x}) = 0 \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$

ii) $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^0} \Delta_0(x)\right|_{x^0=0} = -\delta(\vec{x}).$

2) Tiene soporte causal, queriendo decir con esto que se cumple

$$\Delta_0(x) = 0 \quad \text{siempre que} \quad \underset{(\text{space-Like})}{x^2 < 0}$$

3) Como distribución se puede escribir de la siguiente forma:

$$-\Delta_0(x) = \frac{1}{2\pi}\,\varepsilon(x^0)\,\delta(\lambda) - \frac{m}{4\pi\sqrt{\lambda}}\,\varepsilon(x^0)\,\theta(\lambda)\,J_1(m\sqrt{\lambda}) ,$$

$$\lambda \equiv x^2 = (x^0)^2 - \vec{x}^2 , \qquad \varepsilon(t) = \operatorname{sgn}(t) = \theta(t) - \theta(-t).$$

Función de Green avanzada / retardada

Si definimos $\Delta^{ret}(x) := \theta(x^0)\Delta_0(x)$

y $\Delta^{adv}(x) := -\theta(-x^0)\Delta_0(x)$,

entonces podemos escribir $\Delta_0 = \Delta^{ret} - \Delta^{adv}$

$\rightarrow$ $\Delta^{ret}(x)$ tiene soporte en el cono de luz futuro, mientras que $\Delta^{adv}(x)$ tiene soporte en el cono de luz pasado.

Ejercicio: Mostrar que $\Delta^{ret/adv}$ es una función de Green para el operador de Klein-Gordon.

Componentes de frec. positiva / negativa ; f. de Wightman

Una forma conveniente de escribir a $\Delta_0(x)$, que hace manifiesta la invarianza de Lorentz, es la siguiente:

$$\Delta_0(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \varepsilon(k^0)\, e^{-ik\cdot x}\,\delta(k^2-m^2)$$

Dem:

Haciendo uso de la identidad $\delta(k^2-m^2) = \frac{1}{2E_k}\left(\delta(k^0-E_k)+\delta(k^0+E_k)\right)$, obtenemos

$$\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \varepsilon(k^0)\, e^{-ik\cdot x}\,\delta(k^2-m^2)$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{k}}{2E_k}\left(e^{-i(E_k x^0-\vec{k}\cdot\vec{x})} - \underbrace{e^{-i(E_k x^0-\vec{k}\cdot\vec{x})}}_{=e^{i(E_k x^0+\vec{k}\cdot\vec{x})}}\right)$$

$$= \Delta_0(x)$$

cambio de variable $\vec{k}\mapsto -\vec{k}$

Esta forma de escribir Δ_0 nos permite obtener una una descomposición en "frecuencias positivas / negativas", haciendo uso de $\varepsilon(k^0) = \theta(k^0) - \theta(-k^0)$:

$$\Delta^+(x) := \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \theta(k^0)\,\delta(k^2-m^2)\, e^{-ik\cdot x}$$

$$\Delta^-(x) := \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \theta(-k^0)\,\delta(k^2-m^2)\, e^{-ik\cdot x}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_0(x) = \Delta^+(x) + \Delta^-(x)$$

$$= \Delta^{ret}(x) - \Delta^{adv}(x)$$

Δ^+ y Δ^- también pueden ser expresadas como funciones de Wightman. En efecto, tenemos

$$\Delta^+(x) := \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \theta(k^0)\,\delta(k^2-m^2)\, e^{-ik\cdot x}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4k}{2E_k}\, \theta(k^0)\Big(\delta(k^0-E_k) + \underbrace{\delta(k^0+E_k)}_{\text{este no aporta}}\Big)\, e^{-ik\cdot x}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3\vec{k}}{2E_k}\, f_k(x) .$$

Por otro lado, para la función de Wightman, $\mathcal{W}(x,y)$, tenemos:

$$\mathcal{W}(x,y) := \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle \longrightarrow$$

$$\mathcal{W}(x,y) = \langle 0| \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\left(f_p(x)\,a_p + f_p^*(x)\,a_p^\dagger\right)\int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\left(f_q(y)\,a_q + f_q^*(y)\,a_q^\dagger\right)|0\rangle$$

$$= \langle 0| \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\left(f_p(x)\,a_p\right)\int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\left(f_q^*(y)\,a_q^\dagger\right)|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\, f_p(x)\, f_q^*(y)\,\underbrace{\langle 0|a_p a_q^\dagger|0\rangle}_{2E_p\delta(\vec{q}-\vec{p})} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\, e^{-ip\cdot(x-y)}\Big|_{p^0=E_p}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\, f_p(x-y)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{W}(x,y) = i\,\Delta^+(x-y) .$$

De igual forma se muestra que $\mathcal{W}(x,y) = -i\,\Delta^-(y-x)$.

En efecto, el cálculo anterior muestra que

$$w(y,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\, e^{ip\cdot(x-y)}\Big|_{p^0=E_p} \quad , \quad \text{mientras que}$$

$$-i\Delta^-(x-y) := \frac{-i^2}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \theta(-k^0)\,\delta(k^2-m^2)\, e^{-ik\cdot(x-y)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4k}{2E_k}\, \theta(-k^0)\left(\cancel{\delta(k^0-E_k)} + \delta(k^0+E_k)\right) e^{-ik\cdot(x-y)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{k}}{2E_k}\, e^{-i\left(-E_k(x^0-y^0) - \vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})\right)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3\vec{k}}{2E_k}\, f_k^*(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3\vec{k}}{2E_k}\, f_k(y-x)$$

$$\equiv w(y,x).$$

Finalmente, notemos que el propagador de Feynman, Δ_F, se puede también escribir en términos de Δ^+ y Δ^-:

$$\Delta_F(x-y) = \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle =$$

$$= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle$$

$$= \theta(x^0-y^0)\, w(x,y) + \theta(y^0-x^0)\, w(y,x) \qquad \Delta^- = \overline{(\Delta^+)}$$

$$= i\theta(x^0-y^0)\,\Delta^+(x-y) - i\theta(y^0-x^0)\,\Delta^-(x-y). \qquad \Uparrow$$

$w(x,y) = i\Delta^+(x-y)$, $w(y,x) = -i\Delta^-(x-y)$. $\overline{w(y,x)} = w(x,y) \Rightarrow -i\Delta^-(x-y) = \overline{i\,\Delta^+(x-y)}$
$= -i\,\overline{\Delta^+(x-y)}$

Vamos ahora a calcular de forma explícita las integrales que definen a $\Delta^+(x)$. Con esto podemos obtener fórmulas explícitas para las demás distribuciones que hemos discutido.

Tenemos

$$\Delta^+(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \theta(k^0)\,\delta(k^2-m^2)\, e^{-ik\cdot x}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3\vec{k}}{2E_k}\, f_k(x)$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{k}}{2E_k}\, e^{-i(E_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

$$= \frac{-2\pi i}{2(2\pi)^3}\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} \frac{dk}{E_k}\, k^2\, e^{-iE_k x^0}\, e^{ikr\cos\theta}$$

$$\vec{x}\cdot\vec{k} = \|\vec{x}\|\|\vec{k}\|\cos\theta$$
$$= r\, k\, \cos\theta$$

Integral sobre θ:

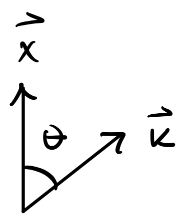
$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, e^{ikr\cos\theta}$$

$t = kr\cos\theta$

$dt = -kr\sin\theta\, d\theta$

$r = \|\vec{x}\|$

$k = \|\vec{k}\|$



$$\overset{\shortparallel}{-\int_{kr}^{-kr} \frac{dt}{kr}\, e^{it}} = -\frac{1}{ikr}\left(e^{-ikr} - e^{ikr}\right)$$

$$d^3\vec{k} = k^2 dk \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$\Longrightarrow$

$$\Delta^+(x) = \frac{-\pi i}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{dk}{E_k} k^2 e^{-iE_k x^0} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta\, e^{ikr\cos\theta}}_{= -\frac{1}{ikr}\left(e^{-ikr} - e^{ikr}\right)}$$

$$= \frac{-\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{dk}{E_k} k\, e^{-iE_k x^0} \frac{(-1)}{r}\left(e^{-ikr} - e^{ikr}\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty dk\, \frac{k}{E_k r}\, e^{-iE_k x^0}\left(e^{-ikr} - e^{ikr}\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\left(\int_0^\infty dk\, \frac{k}{E_k r}\, e^{-iE_k x^0} e^{-ikr} - \int_0^\infty dk\, \frac{k}{E_k r}\, e^{-iE_k x^0} e^{ikr}\right)$$

$p = -k \quad , dp = -dk$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\left(\int_0^\infty dk\, \frac{k}{E_k r}\, e^{-iE_k x^0} e^{-ikr} - \int_0^{-\infty} dp\, \frac{p}{E_p r}\, e^{-iE_p x^0} e^{-ipr}\right)$$

$p = -k \quad , dp = -dk$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta^+(x) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot \frac{k\, e^{-i(E_k x^0 + kr)}}{E_k r}}$$

Notemos ahora que

$$k\, e^{-i(x^0 E_k + kr)} = k\, e^{-ikr} e^{-ix^0 E_k} = -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial r} e^{-ikr} e^{-ix^0 E_k}$$

$$\hookrightarrow \Delta^+(x) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot \frac{k e^{-i(E_k x^0 + kr)}}{E_k r}$$

$$= -\frac{1}{r\,8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{E_k}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial r} e^{-ikr} e^{-ix^0 E_k}$$

$$= -\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{E_k} e^{-i(x^0 E_k + kr)}\right)$$

$\rightarrow$ Definamos
$$f(x) := \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{E_k} e^{i(x^0 E_k + kr)} .$$

Tenemos entonces:

$$\Delta^+(x) = -\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left(f^*(x)\right) , \quad \text{así como}$$

$$\Delta^-(x) = -\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left(f(x)\right)$$

$\rightarrow$ Todo se reduce a evaluar la integral $f(x)$

Para resolver la integral, consideremos el siguiente cambio de variables, teniendo en cuenta que $m^2 = E_k^2 - \vec{k}^2$:

$$E_k = m\cosh\varphi , \quad k = m\sinh\varphi \quad (\hookrightarrow dk = m\cosh\varphi\, d\varphi)$$

$$\hookrightarrow f(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \frac{\cancel{m\cosh\varphi}}{\cancel{m\cosh\varphi}} e^{i(x^0 m\cosh\varphi + m r\sinh\varphi)}$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, e^{im(x^0\cosh\varphi + r\sinh\varphi)} \quad ; \quad \begin{array}{l} x = (x^0, \vec{x}) \\ r = \|\vec{x}\| \end{array}$$

Hay 4 casos a considerar:

1) $x^0 > 0$, $x^0 > r$

2) $x^0 > 0$, $x^0 < r$

3) $x^0 < 0$, $|x^0| > r$

4) $x^0 < 0$, $|x^0| < r$

Siguiendo a BS, introducimos la notación

$$\lambda \equiv x^2 = (x^0)^2 - r^2$$

$\searrow$

1) $x^0 > 0$, $x^0 > r$ $\rightsquigarrow$ $\lambda = (x^0)^2 - r^2 > 0$ (time-like)

Como $\lambda > 0$, tenemos $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{R}_+$. Además, dado que $x^0 > 0$, debe existir φ_0 tq $x^0 = \sqrt{\lambda}\cosh\varphi_0 > 0$

$$\Rightarrow \quad r^2 = (x^0)^2 - \lambda = \lambda(\cosh^2\varphi_0 - 1) = \lambda \sinh^2\varphi_0 \rightarrow r = \sqrt{\lambda}\sinh\varphi_0$$

$\searrow$

$$f(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \; e^{im(x^0\cosh\varphi + r\sinh\varphi)}$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \; e^{im\sqrt{\lambda}\cosh(\varphi+\varphi_0)} = -\frac{1}{2} H_0^{(1)}(m\sqrt{\lambda})$$

función de Hankel

Recordemos que las funciones de Hankel $H_\alpha^{(1)}$, $H_\alpha^{(2)}$ se definen de la siguiente forma,

$$H_\alpha^{(1)} := J_\alpha + i N_\alpha \quad , \quad H_\alpha^{(2)} := J_\alpha - i N_\alpha ,$$

donde J_α es la f. de Bessel cilíndrica (1er tipo),

$$J_\alpha(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, x^{2k+\alpha}}{2^{2k+\alpha}\, k!\, \Gamma(k+\alpha+1)}$$

y N_α la función de Bessel de 2do tipo (Neumann),

$$N_\alpha(x) := \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

(para n entero, $N_n(x) = \lim_{\alpha \to n} N_\alpha(x)$).

Como sabemos, J_α y N_α constituyen un conjunto de 2 soluciones linealmente independientes de la ec. de Bessel: $\quad x y'' + x y' + (x^2 - \alpha^2) y = 0$.

Las funciones de Hankel $H_\alpha^{(1)}$, $H_\alpha^{(2)}$ forman, por lo tanto, otro conjunto linealmente independiente de soluciones.

Aquí estamos interesados en las siguientes representaciones integrales de $H_\alpha^{(1)}$ y $H_\alpha^{(2)}$:

$$H_\alpha^{(1)}(x) = \frac{e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dt \; e^{ix\cosh t - \alpha t} \qquad \text{(ver Arfken)}$$

$$H_\alpha^{(2)}(x) = \frac{e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dt \; e^{-ix\cosh t - \alpha t}$$

Analicemos ahora el segundo caso:

2) $x^0 > 0$, $r > x^0$ (space-like)

En este caso se tiene $\lambda = (x^0)^2 - r^2 < 0$

$\Rightarrow$ $\exists\, \varphi_0, A$ t.q. $r = A\cosh\varphi_0$, $x^0 = A\sinh\varphi_0 > 0$

$\rightsquigarrow$ $r^2 - (x^0)^2 = A^2(\cosh^2\varphi_0 - \sinh^2\varphi_0) = A^2 \equiv -\lambda$

$\longrightarrow$ $A = i\sqrt{\lambda}$, por lo tanto

$$im(x^0\cosh\varphi + r\sinh\varphi) = im(i\sqrt{\lambda}\sinh\varphi_0\cosh\varphi + i\sqrt{\lambda}\cosh\varphi_0\sinh\varphi)$$
$$= -m\sqrt{\lambda}\sinh(\varphi+\varphi_0)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, e^{-m\sqrt{\lambda}\sinh\varphi} \overset{*}{=} \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda})$$

$$K_n(x) = \frac{1}{2}\pi\, i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$$ (f. Bessel modificada de 2do tipo)

*: Ver, p. ej., G. N. Watson, "A treatise on the theory of Bessel functions", Cambridge UP, p. 182.

Los casos 3) y 4) se resuelven de manera similar (ejercicio), dando como resultado

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2i} N_0(m\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{2}\varepsilon(x^0)\, J_0(m\sqrt{\lambda}) , & \lambda > 0 \\ \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda}) , & \lambda < 0 \end{cases}$$

La discontinuidad en $\lambda=0$ tendrá que ser tomada en cuenta a la hora de derivar. Veamos qué se obtiene para Δ^-.

$$\Delta^-(x) = -\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left(f(x)\right)$$

f es una función de $x=(x^0,\vec{x})$ pero, como acabamos de mostrar, esta dependencia es a través de x^0 y λ. Es decir,

$$f(x) \equiv F(x^0, \lambda(x^0,r)) .$$

Por esta razón, para la derivada resp. a r, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial r} = -2r\frac{\partial F}{\partial \lambda} \quad \Longrightarrow$$

$$\Delta^-(x) = -\frac{1}{4\pi r}\cdot(-2r)\frac{\partial F}{\partial \lambda} = +\frac{1}{2\pi}\frac{\partial F}{\partial \lambda}$$

Tenemos

$$F(x^0,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2i}N_0(m\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{2}\varepsilon(x^0)J_0(m\sqrt{\lambda}), & \lambda>0 \\ \frac{i}{\pi}K_0(m\sqrt{-\lambda}), & \lambda<0 \end{cases}$$

A la hora de tomar la derivada, debemos considerar por aparte los 3 casos: $\lambda>0$, $\lambda<0$ y $\lambda=0$.

• $\lambda > 0$:

$$\Delta^-(x) = +\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{2i}N_0(m\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{2}\varepsilon(x^0)J_0(m\sqrt{\lambda})\right)$$

$$= +\frac{1}{2\pi}\left(\frac{m}{4i\sqrt{\lambda}}N_0'(m\sqrt{\lambda}) - \frac{m}{4\sqrt{\lambda}}\varepsilon(x^0)J_0'(m\sqrt{\lambda})\right)$$

$$= -\frac{m}{8\pi\sqrt{\lambda}}\left(\frac{1}{i}N_1(m\sqrt{\lambda}) - \varepsilon(x^0)J_1(m\sqrt{\lambda})\right)$$

$J_0' = -J_1$

$N_0' = -N_1$

• $\lambda < 0$:

$$\Delta^-(x) = +\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{i}{\pi}K_0(m\sqrt{-\lambda})\right)$$

$$= \frac{+im}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}}K_1(m\sqrt{-\lambda})$$

$K_0' = -K_1$

• $\lambda = 0$: aquí debemos tener en cuenta la discontinuidad en cero.

<u>Ejercicio</u>: Sea g una función sobre $\mathbb{R}$ definida a trozos así:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x > 0 \\ g_2(x), & x < 0 \end{cases}$$

Mostrar que la derivada de g, en el sentido de las distribuciones, está dada por

$$g'(x) = \theta(x)\, g_1'(x) + \theta(-x)\, g_2'(x) + \left(g_1(0^+) - g_2(0^-)\right)\delta(x).$$

<u>Ejercicio</u>

Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, y haciendo uso de fórmulas asintóticas para las funciones de Bessel involucradas, mostrar que

$$-\Delta^-(x) = \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left(f(x)\right)$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{4\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda) - \frac{im}{8\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)\left(N_1(m\sqrt{\lambda}) - i\varepsilon(x^0)J_1(m\sqrt{\lambda})\right)$$

$$-\frac{im}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}}\theta(-\lambda)\, K_1(m\sqrt{-\lambda}).$$

En resumen, hemos obtenido las siguientes fórmulas:

$$-\Delta^-(x) = \frac{\varepsilon(x^0)\delta(\lambda)}{4\pi} - \frac{\theta(\lambda)\varepsilon(x^0)\, m}{8\pi\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda})$$

$$-\frac{im}{8\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda) N_1(m\sqrt{\lambda}) - \frac{im}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}}\theta(-\lambda) K_1(m\sqrt{-\lambda}),$$

$$\Delta^+(x) = \overline{\Delta^-(x)}$$

Para la función de Pauli-Jordan obtenemos entonces lo siguiente:

$$\Delta_0(x) = \Delta_+(x) + \Delta_-(x)$$

$$= -\frac{\varepsilon(x^0)\delta(\lambda)}{2\pi} + \frac{\theta(\lambda)\varepsilon(x^0)\, m}{4\pi\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda})$$