§5. El lema de Schur. Relaciones de ortogonalidad.

Def. (Suma directa de representaciones)

ρ_1, ρ_2 : 2 representaciones de G en V_1, V_2, respectivamente.

Suma directa: $V_1 \oplus V_2$

Sobre $V_1 \oplus V_2$ podemos definir una nueva representación, la "suma directa de ρ_1 y ρ_2", denotada $\rho_1 \oplus \rho_2$

$$\rho_1 \oplus \rho_2 (g)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2), \quad (v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} R_1(g) & 0 \\ 0 & R_2(g) \end{pmatrix}.$$

Dada una representación $\rho: G \to GL(V)$, cabe entonces preguntarse si esta es, o no, reducible, es decir si $V \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ con cada V_i irreducible. La respuesta a esta pregunta es positiva y depende de la posibilidad de introducir un producto interior "apropiado".

Proposición. Sea $\rho: G \to GL(V)$ una repn. de un grupo finito G, $\dim V < \infty$. Entonces existe un producto interior hermítico en V (que asumimos es complejo), que es invariante respecto a G, es decir, que satisface

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle = \langle u, v \rangle, \text{ para todo } u, v \in V, g \in G.$$

Dem.

Sea $\langle\, ,\rangle_0$ un producto interior arbitrario en V. Definamos

$$\langle\, ,\, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle_0 .$$

Ejercicio 5.1 Mostrar que la expresión anterior define un producto interior.

$\rightarrow$ Mostremos que $\langle\ ,\ \rangle$ es, en efecto, un producto invariante.

Para $a \in G$, tenemos:

$$\langle \rho(a)u, \rho(a)v \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(a)u, \rho(g)\rho(a)v \rangle_0$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(ga)u, \rho(ga)v \rangle_0$$

$$\underset{g' = ga}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \langle \rho(g')u, \rho(g')v \rangle_0 = \langle u, v \rangle .$$

Definición.

Una representación ρ de G en un espacio vectorial complejo V dotado de un producto interior invariante, se denomina representación unitaria.

- Observación:

Si ρ es unitaria, entonces tenemos que $\rho^{+}(g) = \rho(g^{-1})$. Para mostrar esto, basta observar lo siguiente:

$$\langle \rho(g)u, v \rangle \underset{\langle , \rangle \text{ es inv.}}{=} \langle \underbrace{\rho(g^{-1})\rho(g)}_{= id_V} u, \rho(g^{-1})v \rangle = \langle u, \rho(g^{-1})v \rangle$$

$$\Rightarrow \rho(g)^{+} = \rho(g^{-1})$$

Lema G: grupo finito. $\rho: G \rightarrow Gl(V)$ una repn., $\dim V < \infty$. Entonces V se puede descomponer en una suma directa de subespacios irreducibles.

Dem. Sea W un subespacio invariante de V (si la única opción es $W = V$, es porque ρ es irreducible). Por la proposición anterior, existe en V un producto interior "$\langle\, ,\, \rangle$" que es invariante. Podemos usar $\langle\, ,\, \rangle$ para construir el complemento ortogonal de W:

$$W^{\perp} = \{ v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \ \ \forall\, w \in W \}$$

$\rightarrow V = W \oplus W^{\perp}$

El subespacio $W^{\perp}$ también es un subespacio invariante, ya que si $u \in W^{\perp}$ y $g \in G$, entonces se tiene, para cualquier $w \in W$:

$$\langle \rho(g)u, w \rangle = \langle \rho(g^{-1})\rho(g)u, \rho(g^{-1})w \rangle$$

$$= \langle \underbrace{u}_{\in W^{\perp}}, \underbrace{\rho(g^{-1})w}_{\in W} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \rho(g)u \in W^{\perp}.$$

Restringiendo ρ a W y $W^{\perp}$ (respectivamente), obtenemos dos subrepresentaciones ρ_W y $\rho_{W^{\perp}}$

$\rightarrow V = W \oplus W^{\perp}$, $\rho = \rho_W \oplus \rho_{W^{\perp}}$

Como $\dim V < \infty$, el proceso se puede repetir en cada uno de los subespacios, y tendrá que terminar en algún momento. $\longrightarrow V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$

El lema de Schur.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V_1 \arrow[d, "T"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

$T : V_1 \longrightarrow V_2$

$\longrightarrow \rho_2(g) \circ T = T \circ \rho_1(g) \quad \leftrightarrow \quad$ "$T(g \cdot v) = g \cdot T(v)$"

$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) := \{ T \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \mid \rho_2(g) \circ T = T \circ \rho(g_1) \}$$

"T es G-equivariante"

"T es un G-morfismo".

Sean $\rho_1 : G \to Gl(V_1)$, $\rho_2 : G \to Gl(V_2)$ dos representaciones irreducibles y sea $T \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$.

Entonces:

(i) $T \neq 0 \Rightarrow \rho_1 \sim \rho_2$ (repns. equivalentes)

(ii) $\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow T = \lambda\, id_V$ $(\lambda \in \mathbb{C})$

$(V_1 = V_2 \equiv V)$

Demostración.

(i) • $T \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$: $T \circ \rho_1 = \rho_2 \circ T$

$\hookrightarrow$ solo debemos mostrar que $T : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Veamos:

• $\mathrm{Ker}\, T \leq V_1$ es un subespacio invariante (ejercicio)

• Como ρ_1 irred. y V_1 inv $\to$ solo hay 2 opciones:

1) $\mathrm{Ker} T = \{0\}$ $\longrightarrow$ T inyectiva

2) $\mathrm{Ker} T = V_1 \to T = 0$ (pero se asumió lo contrario)

$\Rightarrow$ T es inyectiva.

• T sobreyectiva: se muestra que $T(V_1) \leq V_2$ es invariante, y se procede de manera similar.

(ii) $T \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$, $(\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho)$ $\longleftrightarrow$ $[\rho(g), T] = 0$.

$T \neq 0 \Rightarrow \exists\, v \in V \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $Tv = \lambda v$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(T - \lambda\, id_V) \neq \phi$. Pero $\mathrm{Ker}(T - \lambda\, id_V)$ es un subespacio invariante,

ya que $u \in \mathrm{Ker}(T - \lambda id) \Rightarrow Tu = \lambda u \Rightarrow \underbrace{\rho(g) T}_{= T \rho(g)} u = \lambda \rho(g) u$

$\Rightarrow \rho(g) u \in \mathrm{Ker}(T - \lambda id)$.

Como ρ es irred. y $\mathrm{Ker}(T - \lambda id) \neq \phi$, debe ser $\mathrm{Ker}(T - \lambda\, id) = V$, i.e. $T = \lambda id$.

- $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ es un espacio vectorial $\longrightarrow \rho_1, \rho_2$ inducen una representación en este espacio vectorial!

$$\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2) \equiv \rho : G \longrightarrow Gl(\mathrm{Hom}(V_1, V_2))$$
$$g \longmapsto \rho(g) : S \longmapsto \rho_2(g) \circ S \circ \rho_1(g)^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "S"'] & V_1 \arrow[d, dashed, "\rho_2(g)\circ S \circ \rho_1(g)^{-1}"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

Ejercicio: mostrar que $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)$ es, en efecto, una representación de G.

Notemos lo siguiente:

$$T \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \iff \rho_2(g) \circ T = T \circ \rho_1(g) \quad \forall g \in G$$
$$\iff \rho_2(g) \circ T \circ \rho_1(g)^{-1} = T \quad \forall g \in G$$
$$\iff \big(\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)\big)(g) T = T \quad \forall g \in G$$

(i.e., la repn. $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)$ es trivial).

——— // ———

<u>Proposición.</u> Sean ρ_1, ρ_2 dos representaciones irred. en V_1, V_2 (resp.) y sea $S_0 \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ <u>cualquier</u> transf. lineal de V_1 en V_2.

Definamos
$$S := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g)\, S_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_2(g) \circ S_0 \circ \rho_1(g^{-1}).$$

Entonces tenemos:

(i) $\rho_1 \not\sim \rho_2 \Rightarrow S = 0$.

(ii) $\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow S = \left(\frac{1}{\dim V} \operatorname{tr} S_0\right) id_V$.

Dem.

(i) Nótese que $S \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ ya que para $a \in G$ se tiene:

$$\rho_2(a) \circ S \circ \rho_1(a)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \rho_2(ag) \cdot S_0 \circ \rho_1(ag)^{-1} \equiv S.$$

Aplicando el converso de Schur (i) obtenemos $S=0$.

(ii) Por el lema de Schur, si $\rho_1 = \rho_2$ ($V_1 = V_2 \equiv V$), dado que $S \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$, debemos tener $S = \lambda\, id_V$. ¿Cuánto vale λ?

$$\hookrightarrow \mathrm{tr}\left(\rho_2(g)\circ S_0 \circ \rho_1(g^{-1})\right) = \mathrm{tr}\left(\rho_1(g^{-1})\circ\rho_2(g)\circ S_0\right) = \mathrm{tr}(S_0)$$

$$\mathrm{tr}\, S = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{tr}(\rho_2(g)\, S_0 \rho_1(g)^{-1}) = \frac{|G|}{|G|}\mathrm{tr}\, S_0 = \lambda\, \mathrm{tr}(id_V) = \lambda \dim V$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{\mathrm{tr}\, S_0}{\dim V}$$

Observación:

Podemos expresar el resultado de la proposición anterior en términos matriciales:

Tenemos: $\rho_1 \not\sim \rho_2 \Rightarrow S=0$. En ese caso,

$$S=0 \iff S_{ij} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\rho_2(g)\circ S_0 \circ \rho_1(g^{-1})\right)_{ij}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{\substack{g\in G\\ k,l}} (\rho_2(g))_{ik}\,(S_0)_{kl}\,(\rho_1(g^{-1}))_{lj} = 0$$

$(S_0)_{kl}$ tiene un valor arbitrario $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{g\in G} (\rho_2(g))_{ij}\,(\rho_1(g^{-1}))_{kl} = 0.$

Para $\rho_1 = \rho_2$ ($\rho \equiv \rho_1 = \rho_2$), $\dim V = n \rightsquigarrow S = \lambda\, id_V = \frac{\mathrm{tr}\, S_0}{n}\, id_V$

$$\hookrightarrow S_{ij} = \frac{1}{n}\left(\sum_l (S_0)_{ll}\right)\delta_{ij} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(g))_{ik}\,(S_0)_{kl}\,(\rho(g^{-1}))_{lj}$$

$(S_0)_{kj}$: conjunto de parámetros arbitrarios (= independientes)

$\Longrightarrow$

Por independencia lineal, obtenemos ($n_\rho = \dim V$):

$$\boxed{\frac{n_\rho}{|G|} \sum_{a \in G} (\rho(a))_{ij} \, (\rho(a^{-1}))_{k\ell} = \delta_{i\ell}\, \delta_{kj}}$$

$\longrightarrow$ Parece una relación de ortogonalidad.

Si las representaciones en cuestión son unitarias, tenemos:

$$(\rho(a^{-1}))_{ij} = \overline{(\rho(a))}_{ji}$$

Para funciones $f : G \to \mathbb{C}$, es natural considerar el prod. escalar

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f_1(a) \overline{f_2(a)}.$$

Considerando las componentes matriciales de ρ_1 y ρ_2 como funciones sobre G, podemos resumir lo obtenido de la siguiente forma:

- $\rho_1 \not\simeq \rho_2 \implies \langle (\rho_1)_{ij}, (\rho_2)_{k\ell} \rangle = 0 \quad \forall\, i, j, k, \ell$

  (entradas matriciales de dos repn irred. ineq. son ortogonales)

- $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho \implies \langle \rho_{ij}, \rho_{k\ell} \rangle = \frac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{j\ell}$

  (entradas matriciales de ρ - irred - son ortogonales)