Diagramas de Feynman — La teoría $\lambda\varphi^4$.

Habiendo discutido el teorema de Wick, podemos pasar a considerar una teoría interactuante y obtener expresiones para el operador de scattering a órdenes bajos en teoría de perturbaciones.

Por simplicidad consideraremos una teoría escalar real, con una interacción de tipo $\lambda\phi^4$. A continuación listamos los elementos necesarios para realizar los cálculos:

- Serie de Dyson: $$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \, T\left(H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)\right)$$

- Expansión del campo (escalar, real) en "modos de Fourier" $\longrightarrow$
$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(f_p(x) a_p + f_p^*(x) a_p^+ \right); \quad f_p(x) = \left.\frac{e^{-ip\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}}\right|_{p^0 \equiv E_p}$$

- Relaciones de conmutación (CCR) $\longrightarrow$ $[a_p, a_q^+] = 2E_p\,\delta(\vec{q}-\vec{p})$

- Propagador de Feynman:
$$\Delta_F(x-y) := \langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(y)) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

- Hamiltoniano de interacción $\longrightarrow$ $H_I = \int \mathcal{H}_I(x)\, d^3\vec{x}$; $\underbrace{\mathcal{H}_I(x) = \lambda :\varphi(x)^4:}_{\text{Escogemos esta interacción porque da lugar a un modelo sencillo y físicamente consistente.}}$

- Teorema de Wick

— // —

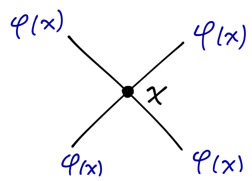
Comencemos entonces por estudiar los términos de orden más bajo en la serie de Dyson. Para tener un verdadero proceso de scattering, hay que considerar los elementos matriciales del operador $S - \mathbb{1}$, así que el orden más bajo está dado por $n = 1$.

$$\to \quad S^{(1)} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3\vec{x}\ \lambda :\varphi(x)^4: \;=\; -i\lambda \int d^4x :\varphi(x)^4:$$

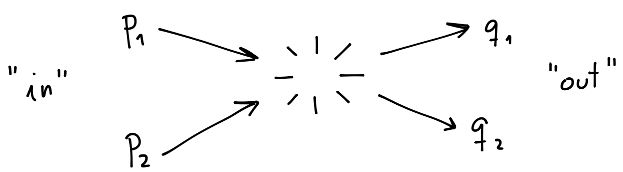
El término $:\varphi(x)^4:$ contiene 4 operadores φ evaluados en x, sin contracciones. Cada vez que aparezca un "punto" (aquí es x), introduciremos un vértice. El número de "puntos" corresponde al número de integraciones o, si lo queremos, al orden en teoría de perturbaciones. Cada operador de campo $\varphi(x)$ sin contraer será representado con una "pata externa" anclada al vértice que representa a x.

Así, tenemos:

$$:\varphi(x)^4: \quad \longleftrightarrow$$



Consideremos ahora un proceso de scattering de la forma



$$\longrightarrow \quad |in\rangle = a^\dagger_{p_1} a^\dagger_{p_2} |0\rangle$$
$$|out\rangle = a^\dagger_{q_1} a^\dagger_{q_2} |0\rangle$$

El elemento matricial que queremos calcular es el siguiente:

$$\langle in|\, S^{(1)} \,|out\rangle = \langle 0| a_{p_1} a_{p_2} (-i\lambda) \int d^4x :\varphi(x)^4:\ a^\dagger_{q_1} a^\dagger_{q_2} |0\rangle$$

Para esto hacemos uso del teorema de Wick (en la versión independiente de t), teniendo en cuenta que $a_{p_1} a_{p_2}$ y $a^\dagger_{q_1} a^\dagger_{q_2}$ ya están en orden normal. Como al final tomamos el valor esperado con el vacío, sólo hace falta considerar los términos con el máximo número de contracciones.

Uno de ellos es, por ejemplo,

$$\checkmark \quad a_{p_1} a_{p_2}\ \varphi(x)\,\varphi(x)\,\varphi(x)\,\varphi(x)\ a^\dagger_{q_1} a^\dagger_{q_2} \quad \longleftarrow$$

solo contracciones entre grupos distintos!

este no $\to$ $\cancel{:a a \varphi\varphi\varphi\varphi a^\dagger a^\dagger:}$

Es fácil ver que todas las contracciones de 4 pares van a resultar siendo equivalentes, siendo estas un total de $24 = 4!$

Tenemos entonces que

$$\langle in | S^{(1)} | out \rangle = (-i\lambda)\, 4! \int d^4x \left[\left(\overline{a_{p_1}\varphi(x)}\right)\left(\overline{a_{p_2}\varphi(x)}\right)\left(\overline{\varphi(x)\, a^\dagger_{q_1}}\right)\left(\overline{\varphi(x)\, a^\dagger_{q_2}}\right) \right].$$

Los términos que hay que calcular son de 2 tipos:

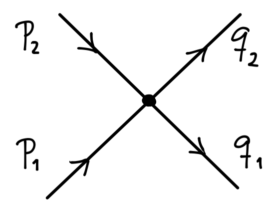
$$\rightarrow \quad \overline{a_p \varphi(x)} = \langle 0 | a_p\, \varphi(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3\vec{k}}{2E_k}\, f^*_k(x)\, \underbrace{\langle 0 | a_p a^\dagger_k | 0 \rangle}_{2E_k\, \delta(\vec{p}-\vec{k})} = f^*_p(x) \qquad \text{"in"}$$

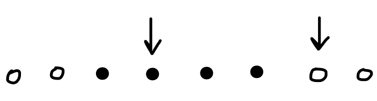
$$\rightarrow \quad \overline{\varphi(x)\, a^\dagger_q} = \langle 0 | \varphi(x)\, a^\dagger_q | 0 \rangle = \int \frac{d^3\vec{k}}{2E_k}\, f_k(x)\, \underbrace{\langle 0 | a_k a^\dagger_q | 0 \rangle}_{2E_k\, \delta(\vec{q}-\vec{k})} = f_p(x) \qquad \text{"out"}$$

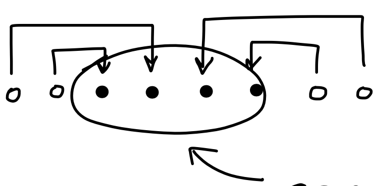
$\Longrightarrow$

$$\langle in | S^{(1)} | out \rangle = \frac{(-i\lambda)\, 4!}{\left((2\pi)^{3/2}\right)^4} \underbrace{\int d^4x\; e^{ix\cdot(p_1+p_2-q_1-q_2)}}_{=\,(2\pi)^4\, \delta(p_1+p_2-q_1-q_2)}$$

$$= \frac{(-i\lambda)(4!)}{(2\pi)^2}\, \delta(p_1+p_2-q_1-q_2)$$







son todos iguales $\rightarrow$ $4! = 24$ posibilidades.

Volviendo a la serie de Dyson,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \, T\big(H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)\big) \, ,$$

A orden 2 tenemos:

$$S^{(2)} = \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \int d^4x \int d^4y \, T\big(:\varphi(x)^4: \, :\varphi(y)^4: \big)$$

Usemos el teorema de Wick para buscar una representación diagramática de $S^{(2)}$.

Aquí un punto clave es tener en cuenta multiplicidades, de forma similar a lo que vimos con $S^{(1)}$.

Como ejemplo, consideremos la siguiente expresión:

$$:O_1 O_2 O_3: \, :AB:$$

Usando el teorema de Wick, tenemos:

$$\begin{aligned} :O_1 O_2 O_3::AB: = \; & :O_1 O_2 O_3 AB: + :O_1 O_2 O_3 AB: + :O_1 O_2 O_3 AB: + :O_1 O_2 O_3 AB: \\ & + :O_1 O_2 O_3 AB: + :O_1 O_2 O_3 AB: + :O_1 O_2 O_3 AB: \\ & + :O_1 O_2 O_3 AB: + :O_1 O_2 O_3 AB: \\ & + :O_1 O_2 O_3 AB: + :O_1 O_2 O_3 AB: \\ & + :O_1 O_2 O_3 AB: + :O_1 O_2 O_3 AB: \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$. En ese caso, la expresión anterior toma la forma

$$:\Theta\,\Theta\,\Theta::AB: \;=\; :\Theta\,\Theta\,\Theta\,AB: + \left(:\Theta\,\Theta\,\Theta AB: + :\Theta\,\Theta\,\Theta AB: + :\Theta\,\Theta\,\Theta AB: \right)$$

$$+ \left(:\Theta\,\Theta\,\Theta AB: + :\Theta\,\Theta\,\Theta AB: + :\Theta\,\Theta\,\Theta AB: \right)$$

$$+ \left(:\Theta\,\Theta\,\Theta AB: + :\Theta\,\Theta\,\Theta AB: \right.$$

$$+ \; :\Theta\,\Theta\,\Theta AB: + :\Theta\,\Theta\,\Theta AB:$$

$$\left. + \; :\Theta\,\Theta\,\Theta AB: + :\Theta\,\Theta\,\Theta AB: \right)$$

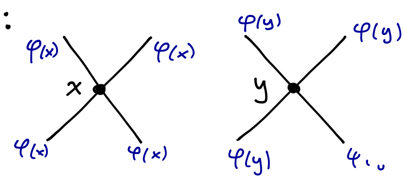
$$= :\Theta^3 AB: + 3\langle 0|\Theta A|0\rangle :\Theta^2 B: + 3\langle 0|\Theta B|0\rangle :\Theta^2 A:$$

$$+ 6\langle 0|\Theta A|0\rangle\langle 0|\Theta B|0\rangle\, \Theta.$$

Así, al calcular $S^{(2)}$ será conveniente tener en cuenta todos los factores combinatorios que aparecerán por el hecho de que $\varphi(x)^4$ es de la forma $\Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_4$, con $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta_4$.

Veamos los términos que obtenemos para $T(:\varphi(x)^4::\varphi(y)^4:)$ al aplicar el teorema de Wick $\rightarrow$

1) $:\varphi(x)^4\varphi(y)^4: \rightarrow$ al considerar elementos matriciales, se verá que este primer término dará lugar a diagramas "disconexos", ya que no hay aquí contracciones entre operadores $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$. Por ahora representaremos este término de la siguiente forma:



2) Términos que contienen <u>una</u> sola contracción. Son de la forma

$$:\varphi(x)\varphi(x)\varphi(x)\overbrace{\varphi(x)\varphi(y)}\varphi(y)\varphi(y)\varphi(y): \;=\; \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle :\varphi(x)^3\varphi(y)^3:$$

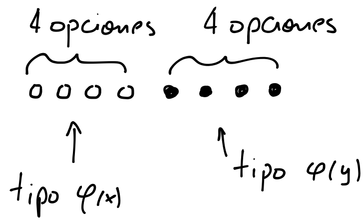
$$= \Delta_F(x-y):\varphi(x)^3\varphi(y)^3:$$

Veamos cuántos términos de estos hay. Para escoger una contracción que involucre un término $\varphi(x)$ y un término $\varphi(y)$, tenemos:

4 opciones para escoger $\varphi(x)$ y 4 para escoger $\varphi(y)$

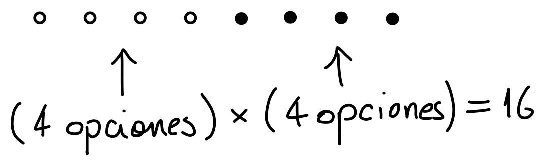
↳ $4^2 = 16$

Representemos así la situación:



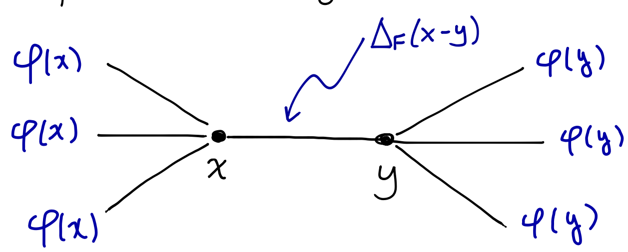
Así que las contribuciones con <u>una</u> contracción nos dan, en total:

$$16\, \Delta_F(x-y) :\varphi(x)^3 \varphi(y)^3: \; ,$$



término que representamos gráficamente de la siguiente forma:

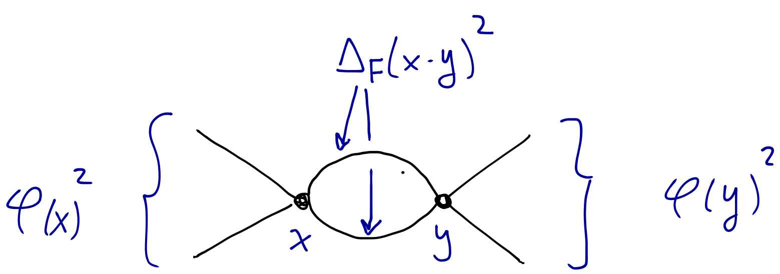
(el gráfico no incluye el factor 16)



↳ cada coordenada $(x, y, \ldots)$ da lugar a <u>un</u> vértice, etiquetado por la coordenada dada. Cada contracción $\varphi(x)\varphi(y)$ corresponde a un propagador $\Delta_F(x-y)$ y se representa como una línea que une los vértices x e y. Los términos no contraídos dan lugar a "patas externas" que serán luego contraídas con operadores de creación/destrucción correspondientes a los estados iniciales/finales.

3) Términos con 2 contracciones. Son de la forma

$\Delta_F(x-y)^2 :\varphi(x)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(y):$ y dan lugar al diagrama



En este caso el cálculo del factor combinatorio requiere algo más de cuidado. Veamos:

$$\overset{x}{\circ\circ\circ\circ}\quad\overset{y}{\bullet\bullet\bullet\bullet}$$

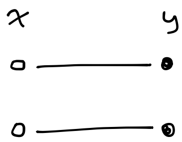
- De cada grupo, escojo 2 de 4. Teniendo que las escogencias dentro de cada grupo son indistinguibles, tenemos $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot3\cdot2}{2\cdot2} = 6$ por grupo. Explícitamente, las escogencias por grupo se ven así:

x

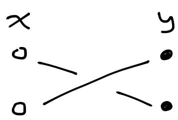
o	o	o	o
x	x		
x		x	
x			x
	x	x	
	x		x
		x	x

$\rightarrow 6 = \binom{4}{2}$ opciones. $\rightarrow x + y \rightarrow \binom{4}{2}^2$ escogencias

- Cada escogencia de pareja debe ser contraída:



ó



$\rightarrow$ 2 opciones por pareja

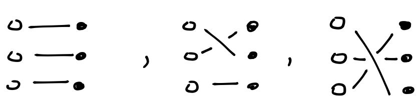
$$\rightarrow \text{total} = \binom{4}{2}^2 \times 2! = \frac{3^2 4^2}{2!} = 72$$

$$\rightarrow 72\,\Delta_F(x-y)^2 :\varphi(x)^2\varphi(y)^2:$$

4) Términos que involucran <u>3</u> contracciones. El patrón es claro:

- De c/grupo, escogemos 3 de 4 (indist.) $\rightarrow \binom{4}{3}$ por grupo $\rightarrow \binom{4}{3}^2$ total $(x+y)$

- Para c/escogencia, debemos "conectar" tres de x (blancos) con tres de y (negros):

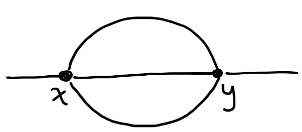


, etc $\rightarrow$ pero esto es justo el número de permutaciones del conjunto $\{1,2,3\}$

$\rightarrow 3!$

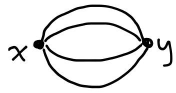
$$\#\ \text{total de términos} = \binom{4}{3}^2 3! = \frac{4^2 3^2 2^2}{3!}.$$

Gráficamente,



$$\rightarrow 96\,\Delta_F(x-y)^3\,\varphi(x)\varphi(y)$$

5) Por último, los términos con 4 contracciones:

$\binom{4}{4}^2 4! = \frac{4^2 3^2 2^2}{4!} = 4! = 24$. Gráficamente $\rightarrow$ 

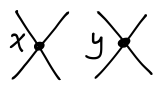
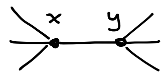
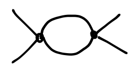
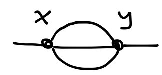
$\hookrightarrow 24\, \Delta_F(x-y)^4$

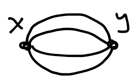
—— // ——

Finalmente, podemos escribir:

$$T(:\varphi(x)^4::\varphi(y)^4:) = :\varphi(x)^4\varphi(y)^4: + 16\,\Delta_F(x-y):\varphi(x)^3\varphi(y)^3:$$

$$+ 72\,\Delta_F(x-y)^2:\varphi(x)^2\varphi(y)^2: + 96\,\Delta_F(x-y)^3:\varphi(x)\varphi(y): + 24\,\Delta_F(x-y)^4$$

=  + 16  + 72  + 96 

+ 24 

$K = \#$ líneas internas $\longrightarrow$ $K!\binom{4}{K}^2$