

# Física de Partículas

FISI-3152 (Andrés Reyes) - Tarea 2 - 22.09.2022

El objetivo de esta tarea es explorar el concepto de *resonancia*, en el contexto de la teoría de scattering no-relativista. Para esto haremos uso del análisis de ondas parciales de la tarea anterior y analizaremos numéricamente un caso particular. Esta tarea contiene “notas de clase”; los ejercicios a ser desarrollados están claramente indicados dentro del texto.

## 1. Estados ligados

La idea de esta tarea es explorar el concepto de *resonancia* a través de un ejemplo concreto. Para esto consideraremos un potencial que corresponde a un pozo esférico de profundidad finita. La energía potencial está dada por

$$V(r) = -V_0\theta(R - r) \equiv \begin{cases} -V_0, & 0 < r < R, \\ 0, & r \geq R. \end{cases} \quad (1)$$

La constante  $V_0 > 0$  representa la profundidad del potencial, mientras que  $R$  representa el alcance del potencial. Escoger esta forma simple del potencial tiene como ventaja que la ecuación radial es exactamente soluble, lo que facilita el análisis del problema. Además, este tipo de potencial es adecuado para modelar fuerzas de corto alcance, de tal forma que tiene múltiples aplicaciones a sistemas físicos reales (el deuterón siendo un ejemplo).

Para poder comprender las propiedades de la sección eficaz cuando la estudiamos como función de la energía, es muy conveniente primero tener control sobre las propiedades de los estados ligados del sistema. Realizaremos el análisis de los estados ligados por pasos, considerando primero el caso  $\ell = 0$  y luego el caso general. La razón para hacer esta distinción es que los estados ligados corresponden a soluciones de la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi = E\psi, \quad (2)$$

con  $E < 0$ . La existencia de este tipo de soluciones depende de la forma del *potencial efectivo*, que a su vez depende del sector de momento angular  $\ell$  que estemos considerando. Recordemos que al proponer un *ansatz* de separación de la forma

$$\psi(\mathbf{r}) \sim \frac{u_\ell(r)}{r} Y_{\ell,m}(\theta, \phi), \quad (3)$$

la función  $u_\ell$  debe satisfacer la siguiente “ecuación radial”:

$$u_\ell''(r) - \frac{2m}{\hbar^2} V_{\text{ef}} u_\ell(r) = \frac{-2mE}{\hbar^2} u_\ell(r), \quad (4)$$

donde  $V_{\text{ef}}$  es el *potencial efectivo*

$$V_{\text{ef}}(r) := \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} + V(r). \quad (5)$$

Mientras que la solución del caso  $\ell = 0$  se puede obtener a partir de funciones trigonométricas elementales, la solución del caso general requiere hacer uso de funciones de Bessel y funciones de Hankel, razón por la cual consideraremos primero el caso  $\ell = 0$ .

### 1.1. Caso particular ( $\ell = 0$ )

Para  $\ell = 0$  la ecuación radial toma la forma

$$u_0''(r) = -\frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0 \theta(R - r)) u_0(r). \quad (6)$$

Los valores propios de energía deben satisfacer la condición  $-V_0 < E < 0$ . De aquí se sigue que  $E + V_0 > 0$ , de tal forma que podemos definir los siguientes parámetros *reales*:

$$\kappa := \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}, \quad \lambda := \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}. \quad (7)$$

La solución general a la ecuación radial está dada por

$$u_0(r) = \begin{cases} B \sin(\kappa r), & r < R, \\ A e^{-\lambda r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (8)$$

Aquí ya hemos impuesto la condición de que el comportamiento de  $u_0(r)$  en el origen no sea singular. Exigiendo la continuidad tanto de  $u_0(r)$  como de su derivada  $u_0'(r)$  en  $r = R$ , obtenemos

$$A e^{-\lambda R} = B \sin \kappa R, \quad (9)$$

$$-\lambda A e^{-\lambda R} = \kappa B \cos \kappa R. \quad (10)$$

Dividiendo ambas ecuaciones para eliminar las constantes  $A$  y  $B$  y reorganizando términos, llegamos a

$$\lambda R = -\kappa R \cot(\kappa R). \quad (11)$$

Debemos además tener en cuenta que  $\lambda$  y  $\kappa$  no son parámetros independientes. De su definición en la ecuación (7) se sigue la siguiente condición:

$$(\lambda R)^2 + (\kappa R)^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} R^2. \quad (12)$$

Si mantenemos fijo el valor de  $R$  podemos variar el radio del círculo en esta ecuación variando el valor de  $V_0$ . Para facilitar el análisis gráfico de este par de ecuaciones, introduzcamos variables adimensionales  $x = \kappa R$  e  $y = \lambda R$ . Así,  $(x, y)$  debe estar sobre un círculo de radio

$$\alpha = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} R. \quad (13)$$

Con estas convenciones, llegamos a la conclusión de que los valores de energía para los estados ligados están determinados por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$y = -x \cot x, \quad (14)$$

$$x^2 + y^2 = \alpha^2. \quad (15)$$

Nótese que la condición  $\lambda > 0$  (necesaria para garantizar la integrabilidad de la función de onda) se traduce en  $y > 0$ . Por lo tanto, para tener soluciones físicamente relevantes, requerimos que  $x$  sea tal que  $-x \cot x > 0$ :

$$(2n + 1)\frac{\pi}{2} \leq x \leq (n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Como se trata de ecuaciones trascendentales (cuya solución se debe obtener numéricamente) será conveniente examinarlas con detenimiento, sobre todo porque así podremos ver cómo van apareciendo estados ligados al ir aumentando el valor de  $V_0$ . Siguiendo con la idea de mantener fijo  $R$ , el único parámetro que vamos a variar es  $V_0$ . De esta forma, por ejemplo, podemos considerar la ecuación  $x^2 + y^2 = \alpha^2$  como la ecuación de un círculo de radio proporcional a  $\sqrt{V_0}$ , donde el eje  $x$  corresponde a  $\kappa R$  y el eje  $y$  a  $\lambda R$ . Tanto  $\lambda R$  como  $\kappa R$  son mayores que cero, así que dicha ecuación solo tiene sentido físico en el primer cuadrante. Por otro lado, la ecuación  $y = -x \cot x$  nos dice que los estados ligados están determinados por los puntos de intersección del círculo de radio  $\alpha$  con la función  $-x \cot x$ .

**Ejercicio 1.** ¿Qué condición sobre el valor de  $\kappa R$  se debe cumplir para que exista por lo menos un estado ligado? A medida que aumentamos el valor de  $V_0$ , manteniendo  $R$  fijo, irán apareciendo nuevos estados ligados. ¿Cuáles son los valores de  $\kappa R$  para los que esto ocurre? Realice un gráfico que ilustre adecuadamente la situación. Sea  $V_{\min}$  el valor mínimo que debe tener el potencial para admitir al menos un estado ligado. Encuentre una expresión para  $V_{\min}$  en términos de  $R$ ,  $\hbar$  y  $m$ .

Este valor del potencial determina una **escala de energía**, que podemos usar para trabajar con cantidades adimensionales. Definamos, por lo tanto, las siguientes variables reducidas:

$$\tilde{E} := \frac{E}{V_{\min}}, \quad \tilde{V}_0 := \frac{V_0}{V_{\min}}. \quad (17)$$

De esta forma podemos expresar nuestras variables como sigue:

$$\lambda R = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\tilde{E}}, \quad \kappa R = \frac{\pi}{2} \sqrt{\tilde{E} + \tilde{V}_0}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{\tilde{V}_0}. \quad (18)$$

**Ejercicio 2.** Muestre que los valores de  $\tilde{V}_0$  para los cuales “entran” nuevos estados son los siguientes:

$$\tilde{V}_0 = (2n + 1)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (19)$$

## 1.2. Caso general ( $\ell \geq 0$ )

Habiendo ganado cierta intuición acerca del problema en el caso  $\ell = 0$ , consideremos ahora el caso genral,  $\ell \geq 0$ . Según el *ansatz* de separación (3), la ecuación que satisface la parte radial es (4). En lo que respecta al cálculo de los estados ligados, podemos considerar esta como la ecuación de Schrödinger de una partícula (en una dimensión espacial) sujeta al potencial

$$V_{\text{ef}}(r) := \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} + V(r) \quad (20)$$

La figura 1 muestra una gráfica de  $V_{\text{ef}}/V_{\text{min}}$  como función de  $r/R$ , para  $\ell = 1$  y para dos valores de  $V_0$ . La forma y profundidad del pozo “efectivo” depende tanto del valor de  $\ell$  como del valor de  $V_0$ . Por ejemplo, para que el potencial efectivo sea negativo, es necesario que se cumpla la siguiente condición:

$$V_0 > \frac{4\ell(\ell + 1)}{\pi^2} V_{\text{min}}. \quad (21)$$

Para  $\ell = 1$  la condición se puede escribir como  $\tilde{V}_0 > 8/\pi^2 \approx 0,81$ . Como se puede ver en la figura 1, justo para este valor de  $V_0$  el potencial efectivo deja de ser negativo. Sin embargo, la curva de energía sigue teniendo un mínimo. Clásicamente, una partícula que

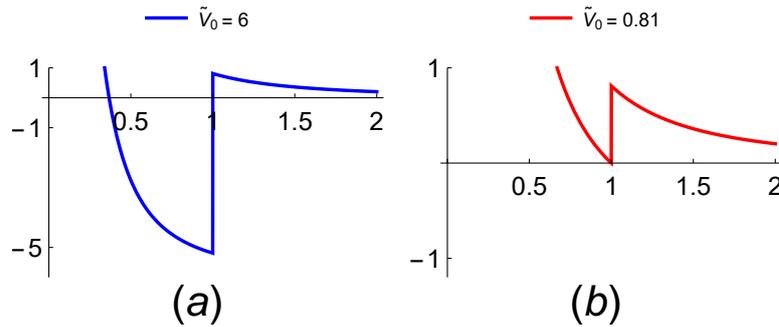


Figura 1: Forma del potencial efectivo  $V_{\text{ef}}/V_{\text{min}}$  (como función de  $r/R$ ) para  $\ell = 1$  para dos profundidades del pozo. (a) Para  $\tilde{V}_0 = 6$ , el pozo es suficientemente profundo como para poder albergar un estado ligado. (b) Para  $\tilde{V}_0 = 0,81$ , el término centrífugo domina y el valor mínimo del potencial ya no será negativo. El estado ligado que se tenía en (a) se ha convertido en una resonancia en (b). El valor de  $\tilde{V}_0$  para el cual ocurre esta transición se puede obtener como una de las raíces de la ecuación (??), evaluada en  $\tilde{E} = 0$ .

tenga una energía total que caiga dentro de la región del pozo estará totalmente confinada. Pero en el problema cuántico esto ya no es cierto. El tunelamiento cuántico nos muestra que eventualmente la partícula dejará el pozo. Este efecto de “atrapamiento temporal” por un pozo (que ya no permite estados ligados) se verá reflejado en la sección eficaz, en la forma de una resonancia. Pero para poder probar esta afirmación (en el caso del ejemplo que nos ocupa) debemos primero encontrar los estados ligados del sistema.

Procederemos de forma similar al caso  $\ell = 0$ . Como estamos buscando soluciones con  $E < 0$ , seguiremos haciendo uso de los parámetros  $\lambda$  y  $\kappa$  definidos en (7). Notemos, sin embargo, que debido a que ahora  $\ell$  puede ser distinto de cero, la condición de energía  $-V_0 < E < 0$  debe ser reemplazada por

$$\frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mR^2} < E + V_0 < V_0. \quad (22)$$

En términos de la función  $u(r)$ , la ecuación radial toma la siguiente forma:

$$u'' - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}u + \kappa^2 u = 0 \quad (\text{en la región } r < R), \quad (23)$$

$$u'' - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}u - \lambda^2 u = 0 \quad (\text{en la región } r > R). \quad (24)$$

En ambos casos, la ecuación radial es de la forma

$$u'' - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}u \pm \xi^2 u = 0, \quad (25)$$

donde  $\xi$  es un parámetro *real*. Para absorber este factor, realizamos el cambio de variable  $x = \xi r$ , de tal forma que se tiene

$$\frac{d}{dr} = \xi \frac{d}{dx}. \quad (26)$$

Esto nos permite reescribir (25) de la siguiente forma:

$$u'' - \frac{\ell(\ell + 1)}{x^2}u \pm u = 0, \quad (27)$$

donde ahora las derivadas se toman con respecto a  $x$ . De esta forma, la distinción entre los dos casos se reduce a una diferencia de signo (aparte de la escogencia específica de  $\xi$ ):

- Caso 1:  $r < R \rightarrow \xi = \kappa$ , signo “+”
- Caso 2:  $r > R \rightarrow \xi = \lambda$ , signo “-”

En el primer caso ( $r > R$ ), vemos que  $u$  es de la forma  $u_\ell(x) \propto x j_\ell(x)$ , donde  $j_\ell(x)$  es la función de Bessel esférica de grado  $\ell$ .

Debido a la plétora de funciones de “tipo Bessel” que se encuentran en la literatura, antes de continuar resultará conveniente considerar diferentes versiones (todas equivalentes) de la ecuación radial.

Comencemos por reescribir el *ansatz* de separación para la función de onda en la forma

$$\psi(\mathbf{r}) = f(r)Y(\theta, \phi), \quad (28)$$

donde  $f$  es una función que solamente depende de la coordenada radial y  $Y$  alguna función esférica (cf. tarea 1). Partiendo de  $f(r)$ , consideremos otras dos funciones,  $u(r)$  y  $J(r)$ , determinadas por las siguientes condiciones:

$$f(r) = \frac{u(r)}{r} = \frac{J(r)}{\sqrt{r}}. \quad (29)$$

Nótese que de aquí también resulta  $u(r) = \sqrt{r}J(r)$ . Si  $Y$  es de grado  $\ell$ , entonces una serie de cálculos sencillos (pero tediosos) nos mostrarán que las funciones  $f$ ,  $u$  y  $J$  satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales, todas equivalentes a la ecuación radial (27) con la escogencia de **signo positivo** y donde estamos usando la convención  $x = \xi r$ :

$$f'' + \frac{2}{x}f' + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right)f = 0, \quad (30a)$$

$$J'' + \frac{1}{x}J' + \left(1 - \frac{(\ell+1/2)^2}{x^2}\right)J = 0, \quad (30b)$$

$$u'' + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right)u = 0. \quad (30c)$$

La ecuación (30b) es la ecuación diferencial de Bessel con índice semi-entero  $\nu = \ell + 1/2$ :

$$J''_{\nu} + \frac{1}{x}J'_{\nu} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J_{\nu} = 0. \quad (31)$$

Sus soluciones son las **funciones de Bessel**  $J_{\nu}(x)$  (también conocidas como **funciones de Bessel de primer tipo**), cuya definición como serie de potencias es

$$J_{\nu}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}. \quad (32)$$

Como hemos mencionado (tarea 1), cuando el índice  $\nu$  no es entero, las funciones  $J_{\nu}$  y  $J_{-\nu}$  forman un conjunto completo de soluciones de la ecuación. En vista de (29), vemos que la función radial  $f$  debe ser de la forma  $x^{-1/2}J_{\pm\nu}(x)$ , con  $\nu = \ell + 1/2$ . Recordando la definición de las **funciones de Bessel esféricas**,

$$j_{\ell}(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x), \quad (33)$$

vemos entonces que las dos soluciones independientes para (30a) son  $j_{\ell}$  y  $j_{-(\ell+1)}$ . Sin embargo, como la ecuación (30a) es la que nos da la solución en la región  $r < R$ , la función  $j_{-(\ell+1)}$  debe ser descartada, ya que esta es singular en el origen. Esto nos deja con (un múltiplo de)  $j_{\ell}(x)$  como la solución al problema radial en la región interior del

pozo de potencial. Como ilustración, consideremos el caso  $\ell = 0$  (que ya resolvimos). En este caso las dos soluciones independientes de la ecuación radial (en la forma (30a)) son  $j_0$  y  $j_{-1}$ . Para estas funciones tenemos

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_{-1}(x) = \frac{\cos x}{x}. \quad (34)$$

Claramente solo la primera opción es no singular en el origen (cf. (8)).

En este punto, podemos afirmar lo siguiente:

Para  $r < R$ , la función de onda es de la forma  $\psi(\mathbf{r}) = f(r)Y(\theta, \phi)$ , con

$$f(r) = \tilde{B}j_\ell(\kappa r), \quad (35)$$

para alguna constante  $\tilde{B}$  y con  $\kappa$  definida como en (7).

Pasemos ahora a considerar las soluciones en la región  $r > R$ . Esto equivale a estudiar la ecuación (27) con la escogencia “-” para el signo. Notemos que si en la ecuación (31) realizamos el cambio de variable  $x \mapsto ix$ , la ecuación toma la forma

$$F'' + \frac{1}{x}F' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)F = 0. \quad (36)$$

Esta se conoce como la **ecuación de Bessel modificada** y sus soluciones son las siguientes **funciones de Bessel modificadas**:

$$I_\nu(x) := i^{-\nu}J_\nu(ix), \quad (37a)$$

$$K_\nu(x) := \frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix). \quad (37b)$$

La función  $I_\nu$  no es otra cosa que una función de Bessel de argumento imaginario. Por otro lado, la función  $K_\nu$  está definida en términos de una función de Hankel. Las **funciones de Hankel** son combinaciones lineales de funciones de Bessel y funciones de Neumann,

$$H_\nu^{(1)}(x) := J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad (38a)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) := J_\nu(x) - iN_\nu(x), \quad (38b)$$

donde la **función de Neumann**  $N_\nu$  (en ocasiones denotada como  $Y_\nu$ ) se define de la siguiente forma:

$$N_\nu(x) := \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}. \quad (39)$$

Las funciones de Neumann también se conocen como funciones de Bessel de segundo tipo y las funciones de Hankel también se encuentran bajo el nombre de funciones de Neumann de tercer tipo.

Como nos interesa la región  $r > R$ , para tener estados ligados tenemos que escoger aquellas soluciones de la ecuación de Bessel modificada que decaigan para  $r \rightarrow \infty$ . El comportamiento asintótico de  $I_\nu$  (así como el de  $K_\nu$ ) se puede obtener fácilmente a partir de las fórmulas respectivas para  $J_\nu$ .

De forma análoga al caso de las funciones de Bessel esféricas, se definen también las **funciones de Neumann esféricas** (o funciones de Bessel esféricas de segundo tipo),  $n_\ell$ , así como las **funciones de Hankel esféricas**,  $h_\ell^{(1)}$  (de primer tipo),  $h_\ell^{(2)}$  (de segundo tipo). Todas estas están definidas (o se pueden expresar) en términos de funciones de Bessel de primer tipo con índice semi-entero, como se indica a continuación:

$$j_\ell(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x), \quad (40)$$

$$n_\ell(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\ell+1/2}(x) \equiv (-1)^{\ell+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-(\ell+1/2)}(x), \quad (41)$$

$$h_\ell^{(1)}(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\ell+1/2}^{(1)}(x) \equiv j_\ell(x) + in_\ell(x), \quad (42)$$

$$h_\ell^{(2)}(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\ell+1/2}^{(2)}(x) \equiv j_\ell(x) - in_\ell(x). \quad (43)$$

La siguiente es una útil fórmula cerrada para  $h_\ell^{(1)}$ :

$$h_\ell^{(1)}(x) = -i(-x)^\ell \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^\ell \left( \frac{e^{ix}}{x} \right). \quad (44)$$

Según lo que hemos discutido, la solución general de la ecuación radial en la región  $r > R$  debe ser de la forma  $f(r) = Aj_\ell(i\lambda r) + Bh_\ell^{(1)}(i\lambda r)$ . Para que esta solución sea aceptable físicamente, debemos exigir  $A = 0$ . En resumen:

Para  $r > R$ , la función de onda es de la forma  $\psi(\mathbf{r}) = f(r)Y(\theta, \phi)$ , con

$$f(r) = Bh_\ell^{(1)}(i\lambda r), \quad (45)$$

para alguna constante  $B$  y con  $\lambda$  definida como en (7).

**Ejercicio 3.** La condición para determinar los posibles valores propios de energía resulta de exigir la continuidad de la función radial, así como de su derivada, en el punto  $r = R$ . Obtenga una ecuación para estos valores propios (para el sector de momento angular  $\ell$ ) que no involucre las constantes de normalización. Muestre también que en el caso  $\ell = 0$  el resultado se reduce al obtenido en la sección anterior.

**Ejercicio 4.** Nos interesa encontrar aquellos valores de  $\tilde{V}_0$  para los cuales “entran” nuevos estados ligados, a medida que vamos aumentando la profundidad del pozo. Muestre que para el sector de momento angular  $\ell$  estos valores están determinados por la raíces de la siguiente ecuación:

$$-x j'_\ell(x) = (\ell + 1) j_\ell(x), \quad (46)$$

donde  $x = (\pi/2)\sqrt{\tilde{V}_0}$ . Muestre que, para el caso particular  $\ell = 1$ , las soluciones son de la forma  $x = n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), es decir (en el caso  $\ell = 1$ ), los valores de  $\tilde{V}_0$  para los cuales aparecen nuevos estados ligados al aumentar un poco la profundidad del potencial están dados por

$$\tilde{V}_0 = 4, 16, 36, 64, \dots \quad (47)$$

La figura 2 muestra cómo el estado ligado con energía  $\tilde{E} \approx -1,235$  (que está presente cuando  $\tilde{V}_0 = 6$ ) se va moviendo hacia cero a medida que  $\tilde{V}_0$  se va a aproximando a 4.

## 2. Solución de la ecuación radial ( $E > 0$ )

### 2.1. Ondas S ( $\ell = 0$ )

La ecuación radial para el problema de dispersión es formalmente la misma que para los estados ligados, con la única diferencia de que ahora buscamos soluciones con  $E > 0$ . Esto nos permite mantener intacta la definición de la constante *kappa*:

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}. \quad (48)$$

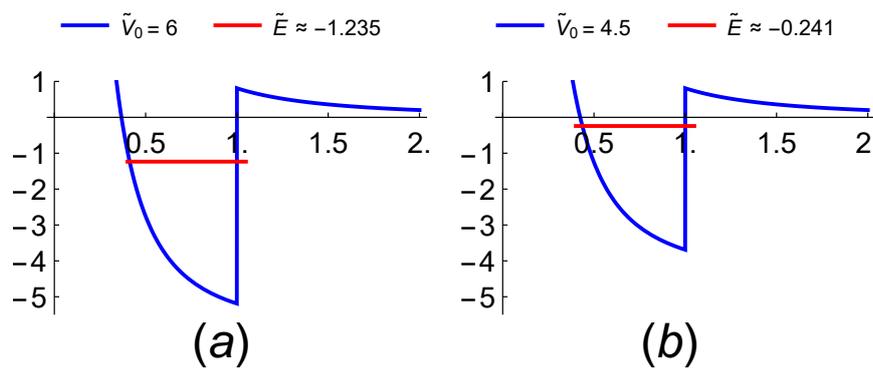


Figura 2

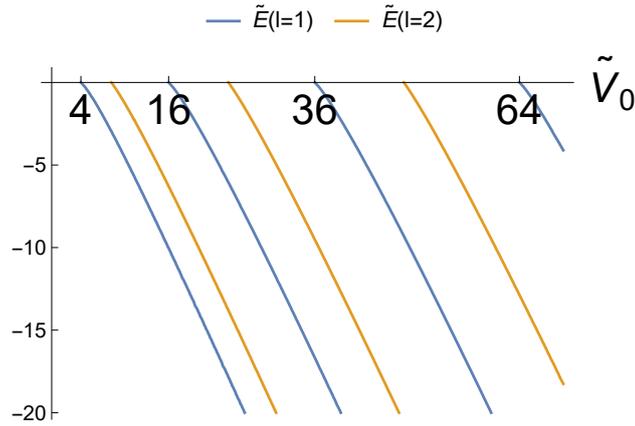


Figura 3: Energías de ligadura correspondientes a los sectores  $\ell = 1$  (en azul) y  $\ell = 2$  (en naranja). Para el caso  $\ell = 1$ , vemos que a medida que aumenta la profundidad del potencial, van apareciendo nuevos estados ligados, en las posiciones especificadas en (47). En particular, se puede ver que la **profundidad mínima** del potencial para que exista al menos un estado ligado es  $\tilde{V}_0 = 4$ .

El cambio de signo en la energía será tomado en cuenta reemplazando la definición de la constante  $\lambda$  en (7) por la siguiente:

$$k := \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}. \quad (49)$$

El significado físico de este parámetro es claro:  $k$  es la magnitud del momento lineal de la partícula incidente. Para cuando grafiquemos la sección eficaz total en función de la energía resultará conveniente contar con la siguiente fórmula, que relaciona  $k$  con  $\tilde{E} \equiv E/V_{\min}$ :

$$kR = \frac{\pi}{2} \sqrt{\tilde{E}}. \quad (50)$$

En el caso  $\ell = 0$  la ecuación radial puede ser escrita de la siguiente forma:

$$u_0''(r) = -k^2 u_0(r) - (\kappa^2 - k^2) \theta(R - r) u_0(r). \quad (51)$$

Se sigue de aquí que en la región  $r < R$  la solución (regular en el origen) es de la forma

$$u_0(r) = A \sin(\kappa r), \quad (52)$$

mientras que en la región  $r > R$  la solución general es una combinación lineal de  $\sin(kr)$  y  $\cos(kr)$ . Sin embargo, es más conveniente tener en cuenta la forma asintótica general de la función radial, así como la convención en la definición de los *phase shifts* (cf. tarea 1). De esta forma, tenemos que para  $r > R$  la solución es de la forma

$$u_0(r) = B \sin(kr + \delta_0(k)). \quad (53)$$

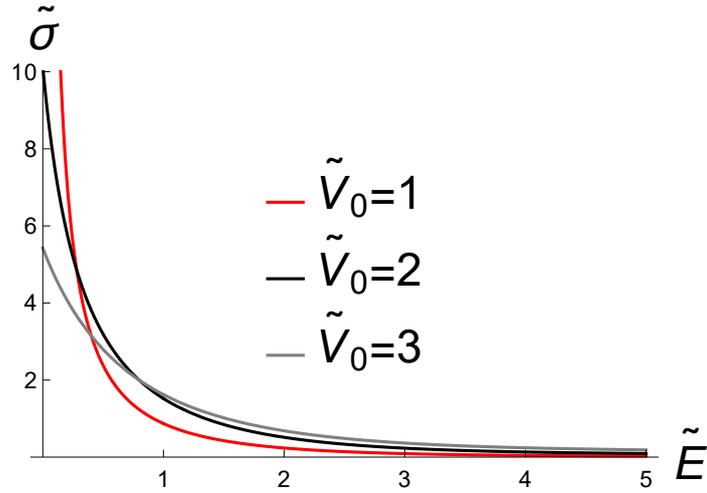


Figura 4: Contribución del sector  $\ell = 0$  a la sección eficaz total (en unidades de  $\pi R^2$ ) en función de la energía (en unidades de  $V_{\min}$ ) para diferentes valores de  $V_0$ . Cuando  $\tilde{V}_0 = 1$  observamos una divergencia en la sección eficaz a bajas energías. Este comportamiento se puede explicar a partir del comportamiento de los estados ligados.

Imponiendo continuidad de la derivada logarítmica de  $u_0$  en  $r = R$ , obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$A \sin(\kappa R) = B \sin(kR + \delta_0(k)), \quad (54a)$$

$$\kappa A \cos(\kappa R) = kB \cos(kR + \delta_0(k)). \quad (54b)$$

Dividiéndolas y despejando a favor de  $\delta_0$ , obtenemos

$$\tan \delta_0(k) = \frac{k \tan(\kappa R) - \kappa \tan(kR)}{\kappa + k \tan(kR) \tan(\kappa R)}, \quad (55)$$

de donde se sigue

$$\sin^2 \delta_0(k) = \frac{(kR \tan(\kappa R) - \kappa R \tan(kR))^2}{(kR \tan(\kappa R) - \kappa R \tan(kR))^2 + (\kappa R + kR \tan(kR) \tan(\kappa R))^2}. \quad (56)$$

Esto es todo lo que necesitamos para calcular la contribución de las ondas S a la sección eficaz total. El parámetro natural de área para este problema es  $\pi R^2$ . Podemos por lo tanto expresar la sección eficaz en términos de esta unidad de área. Recordando la fórmulas obtenidas en la tarea 1, tenemos que

$$\tilde{\sigma} \equiv \frac{\sigma(\tilde{E})}{\pi R^2} = \frac{16}{\pi^2 \tilde{E}} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell}(k). \quad (57)$$

Evaluando numéricamente la contribución del término de grado  $\ell$  a la sección eficaz (57) (para varios valores de  $V_0$ ) obtenemos curvas como las indicadas en la figura 4. En la figura se ve claramente cómo, a medida que  $\tilde{V}_0$  se acerca al valor crítico 1, la sección

eficaz a bajas energías comienza a diverger. Esto es algo que tiene sentido, ya que si hacemos un poco más profundo el potencial, obtendremos un estado ligado con una energía muy cercana a cero. Al disminuir la profundidad del pozo de potencial, haremos que este estado ligado se convierta en una resonancia a bajas energías.

**Ejercicio 5.** Según el análisis de las secciones anteriores, es de esperarse que para  $\tilde{V}_0 = (2n + 1)^2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) la sección eficaz presente el comportamiento descrito en el párrafo anterior. Para evidenciar esto, realice un gráfico de la sección eficaz, evaluada en  $\tilde{E} = 0.02$ , como función de  $\tilde{V}_0$ . Comente su resultado.

## 2.2. Análisis general de ondas parciales

En el caso  $\ell \geq 0$  la ecuación radial toma la siguiente forma:

$$u_\ell''(r) + \left( k^2 + (\kappa^2 - k^2)\theta(R - r) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) u_\ell(r) = 0. \quad (58)$$

Por lo discutido previamente es claro que las soluciones de esta ecuación deben ser de la siguiente forma:

$$f_\ell(r) \equiv \frac{u_\ell(r)}{r} = \begin{cases} A_\ell^{(\text{in})} j_\ell(\kappa r), & r < R, \\ A_\ell j_\ell(\kappa r) + B_\ell n_\ell(\kappa r), & r > R. \end{cases}$$

Para la solución en la región interior del potencial solo hace falta considerar funciones de Bessel esféricas de primer tipo, ya que las de segundo tipo (Neumann) son singulares en el origen. La usual condición de continuidad diferenciable de la función radial en  $r = R$  se puede expresar convenientemente en términos de la *derivada logarítmica* de  $f_\ell$ , evaluada en  $r = R$ .

Definamos, por lo tanto, el siguiente parámetro:

$$\beta_\ell := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{R}{f_\ell(r)} \frac{df_\ell(r)}{dr} \right) \Big|_{r=R-\varepsilon}. \quad (59)$$

Teniendo en cuenta la forma de la función radial para  $r < R$ , obtenemos el siguiente resultado:

$$\beta_\ell = \frac{\kappa R j_\ell'(\kappa R)}{j_\ell(\kappa R)}. \quad (60)$$

Para evaluar la derivada logarítmica en el límite desde la derecha ( $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R + \varepsilon$ ) es necesario obtener una relación entre  $A_\ell$  y  $B_\ell$ .

**Ejercicio 6.** Muestre que  $B_\ell/A_\ell = -\tan \delta_\ell$ . Haga uso de este resultado para evaluar la derivada logarítmica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{R}{f_\ell(r)} \frac{df_\ell(r)}{dr} \right) \Big|_{r=R+\varepsilon}. \quad (61)$$

Igualando el resultado a  $\beta_\ell$  y despejando a favor de  $\delta_\ell$ , obtenga una expresión para  $\sin^2 \delta_\ell$ , en función de los parámetros  $k$ ,  $R$  y  $\ell$ .

**Ejercicio 7.** Realice un gráfico que muestre la contribución del sector  $\ell = 1$  a la sección eficaz (en unidades de  $\pi R^2$ ) para  $\tilde{V}_0 = 3.0, 3.5, 4.0$  y  $4.5$ , en función de  $\tilde{E}$ . Comente acerca del significado físico de su resultado.

**Ejercicio 8.** Para  $\ell = 2$ , el primer estado ligado aparece cuando la profundidad ( $\tilde{V}_0$ ) del potencial es mayor a 8.183 (ver figura 3). Para  $\tilde{V}_0 = 7.5$ , dicho estado ya no es un estado ligado, y ha pasado a ser un estado de resonancia. Para evidenciar este comportamiento de la sección eficaz, realice un gráfico de la misma, en función de  $\tilde{E}$ , para el caso  $\tilde{V}_0 = 7.5$ . Muestre por separado las contribuciones individuales de los términos  $\ell = 0, 1$  y  $2$ , así como la suma de todos los términos para  $0 \leq \ell \leq 10$ .

---

Fecha de entrega: Viernes 14 de octubre, en clase.