Contratérminos

Renormalización Perturbativa
Andrés Reyes

Ref: Bogoliubov & Shirkov (Quantum Fields), §25 (Isolation of the divergences)

Consideraremos campos escalares reales con interacciones de la forma

$$\mathcal{H}_I(x) = \lambda :\varphi(x)^3: \;, \quad \lambda :\varphi(x)^4:$$

Convenciones:

- $\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(f_p(x) a_p + f_p^*(x) a_p^+ \right)$
- $f_p(x) = \left. \frac{e^{-ip\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}} \right|_{p^0 = E_p} \;, \quad E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$
- $[a_p, a_q^+] = 2E_p\, \delta(\vec{q} - \vec{p})$
- Propagador de Feynman: $\Delta_F(x-y) = \langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(y)) | 0 \rangle$

→ Recordar: El propagador de Feynman es una función de Green para el operador de Klein-Gordon, i.e., Δ_F satisface

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Delta_F(x-y) = -i\delta(x-y).$$

Explícitamente, está dado por la siguiente expresión:

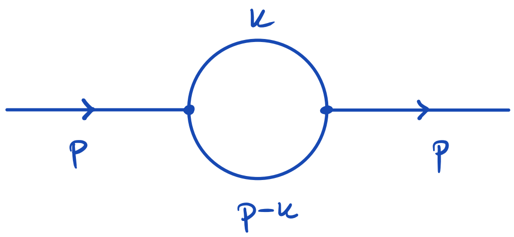
$$\Delta_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

(para comparar con la notación de Bogoliubov ⇝ $D^c(x) = i\Delta_F(x)$)

→ Serie de Dyson:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \, T\left(\mathcal{H}_I(x_1) \cdots \mathcal{H}_I(x_n) \right)$$

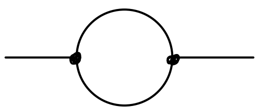
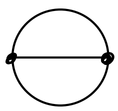
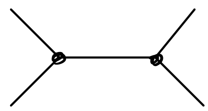
Primer ejemplo:



Este diagrama proviene de una teoría $\lambda\varphi^3$. Está asociado a un término de orden 2 de la matriz de scattering:

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!}\lambda^2 \int d^4x \int d^4y \; T\left(:\varphi(x)^3: \, :\varphi(y)^3:\right).$$

$S^{(2)}$ da lugar a varios diagramas; entre ellos, tenemos:

 ,  ,  , ...

Nos interesa el primero de estos, el diagrama de autoenergía ( ):

Según el teorema de Wick, la contribución a $S^{(2)}$ que corresponde a este diagrama es la siguiente (multiplicidad = $2\binom{3}{2}^2 = 18$)

$$\frac{(-i)^2}{2!}\, 18\, \lambda^2 \int d^4x \int d^4y \left(\Delta_F(x-y)\right)^2 :\varphi(x)\varphi(y):$$

El propagador $\Delta_F(x)$ es en realidad una distribución. Por lo tanto, el producto $\Delta_F(x)\Delta_F(x)$ no está definido. Esta es la razón detrás de la divergencia del diagrama asociado a esta expresión.

¿Cómo encontrar una solución a este problema?

Comencemos por reconocer el caracter singular (de distribución) del propagador $\Delta_F(x)$. De hecho, se puede mostrar que para x cercano a cero, se tiene:

$$\Delta_F(x) \simeq \frac{\delta(x^2)}{4\pi} + \frac{1}{4\pi^2 i x^2} - \frac{m^2}{16\pi}\theta(x^2) + \frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{m\sqrt{|x|^2}}{2} + \cdots$$

Analizaremos el problema en el espacio de momento.

Recordemos que (con una convención adecuada en la definición de $\mathcal{F}$), la transformada de Fourier "$\mathcal{F}$" y la convolución "$*$" están relacionadas a través de la siguiente identidad:

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Usando la notación $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, tenemos entonces que $(\widehat{fg}) = \hat{f} * \hat{g}$.

Suponiendo que sea posible, de alguna forma, definir el producto $\Delta_F(x)\Delta_F(x)$, esperaríamos que se mantuviera dicha identidad, i.e., $(\widehat{\Delta_F^2}) = \Delta_F * \Delta_F$.

Claramente, en este momento ninguna de estas expresiones está bien definida.

Podemos, sin embargo, seguir calculando de manera "formal", e intentar resolver el problema de una de las siguientes 2 formas:

- Opción 1: arreglar el problema a nivel de $\hat{\Delta}_F$ $\rightsquigarrow$ Pauli-Villars.
- Opción 2: arreglar el problema a nivel de $(\widehat{\Delta_F^2})$ (o, de manera equivalente, a nivel de $\hat{\Delta}_F * \hat{\Delta}_F$) $\rightsquigarrow$ Reg Dim

Notemos que, formalmente, las expresiones para $(\widehat{\Delta_F^2})$ y para $\hat{\Delta}_F * \hat{\Delta}_F$ coinciden:

- Por un lado, tenemos, con $\hat{\Delta}_F(k) = \dfrac{i}{(2\pi)^2(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}$,

$$\hat{\Delta}_F * \hat{\Delta}_F(p) = \int d^4k\, \hat{\Delta}_F(p-k)\, \hat{\Delta}_F(k) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \cdot \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\varepsilon]}$$

- Por otro lado, asumiendo que tiene sentido escribir $\Delta_F(x)^2$, obtenemos, para su transformada de Fourier,

$$(\widehat{\Delta_F^2})(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x\, e^{ip\cdot x} \left[\Delta_F(x)^2\right]$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^{10}} \int d^4x\, e^{ip\cdot x} \int d^4k \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \int d^4q \frac{e^{-iq\cdot x}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4k \int d^4q \frac{\delta^{(4)}(p-k-q)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(q^2 - m^2 + i\varepsilon)}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4k \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\varepsilon][(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon]}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\Delta}_F * \hat{\Delta}_F = (2\pi)^2 (\widehat{\Delta_F^2}).$$

Optaremos por la opción de regularizar la integral que corresponde a $(\widehat{\Delta_F^2})$ haciendo uso de regularización dimensional. Para esto, comencemos por definir

$$I(p) := \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\eta][(p-k)^2 - m^2 + i\eta]}$$

En las notas "Regularización dimensional" se trabajó una integral, a la que llamamos $I^{(D)}(p)$, y que coincide con $I(p)$ cuando $D=4$.

Para $I^{(D)}(p)$ habíamos obtenido previamente el siguiente resultado:

$$I^{(D)}(p) = \frac{i\pi^{D/2}}{2} \frac{\Gamma(2-D/2)}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-D/2}}$$

Si tomamos $D = 4 - 2\varepsilon$, obtenemos

$$I^{(D=4-2\varepsilon)}(p) = \frac{i\pi^{D/2}}{2} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{\varepsilon}}$$

$$= \frac{i\pi^{D/2}}{2} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{\varepsilon}}$$

$$= \frac{i}{32\pi^2} \cdot (4\pi)^{\varepsilon} \, \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{\varepsilon}}$$

<u>Observación</u>.

Es claro que la integral $I(p)$ aparece como parte de una contribución de orden λ^2 en una teoría $\lambda\varphi^3$.

Como estamos usando el método de regularización dimensional, es necesario tener en cuenta que, al cambiar la dimensión $(4 \to D)$, la acción ahora será de la forma $\int d^Dx \, \mathcal{L}^{(D)}$, donde $\mathcal{L}^{(D)}$ debe ser un Lagrangiano con las unidades adecuadas. Para el caso del campo escalar con interacción $\lambda\varphi^3$ es fácil mostrar que para que $\int d^Dx \, \mathcal{L}^{(D)}$ mantenga unidades de acción basta con introducir un factor μ (con dimensiones de masa) que modifica la constante de acople λ de la siguiente forma:

$$\lambda \longrightarrow \lambda' = \mu^{(4-D)/2} \lambda$$

Por esta razón, introduciremos una nueva integral, que es tan solo $(\lambda')^2$ veces la integral $I^{(D)}(p)$:

$$\Lambda^{(D)}(p) := (\lambda')^2 I^{(D)}(p)$$

$$= \lambda^2 (\mu^2)^{(4-D)/2} \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\eta][(p-k)^2 - m^2 + i\eta]}$$

De esta forma, si tomamos $D = 4 - 2\varepsilon$, obtenemos:

$$\Lambda^{(D=4-2\varepsilon)}(p) = \frac{i}{32\pi^2} \lambda^2 \, \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2} \right]^{\varepsilon}$$

Para simplificar la notación, escribiremos

$$\mathrm{reg}_\varepsilon \Lambda(p) := \Lambda^{(D=4-2\varepsilon)}(p)$$

Ahora, para aislar la divergencia en $\mathrm{reg}_\varepsilon \Lambda(p)$, usaremos la siguiente forma asintótica de la función gamma (válida para $\varepsilon \ll 1$):

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon),$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

Ahora, teniendo en cuenta que $A^{\varepsilon} = e^{\varepsilon \ln A} \approx 1 + \varepsilon \ln A$, podemos escribir, para $\varepsilon << 1$,

$$\operatorname{reg}_{d\varepsilon} \Lambda(p) = \frac{i}{32\pi^2} \lambda^2 \, \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2} \right]^{\varepsilon} =$$

$$= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \left(1 + \varepsilon \int_0^1 dx \ln\left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right)$$

$$= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(\int_0^1 dx \ln\left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2} \right] - \gamma \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Volviendo a la expresión inicial para $\widehat{\Delta_F^2}$, recordemos que teníamos lo siguiente:

$$(\widehat{\Delta_F^2})(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x \, e^{ip\cdot x} \left[\Delta_F(x)^2 \right] = \cdots$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4k \, \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\eta][(p-k)^2 - m^2 + i\eta]}$$

$$= -\frac{2}{(2\pi)^2} \, I(p)$$

Reemplazando estas expresiones formales por sus versiones regularizadas, podemos escribir:

$$(\lambda')^2 \operatorname{reg}_{d\varepsilon}(\widehat{\Delta_F^2})(p) = -\frac{2}{(2\pi)^2} \operatorname{reg}_{d\varepsilon} \Lambda(p)$$

$\longrightarrow$

$$(\lambda')^2 \operatorname{reg}_\varepsilon(\hat{\Delta}_F^2)(p) =$$

$$= -\frac{i\lambda^2}{64\pi^4}\cdot\frac{1}{\varepsilon} + \frac{i\lambda^2}{64\pi^4}\left(\gamma - \int_0^1 dx\, \ln\left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2}\right]\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Si definimos

$$\boxed{\begin{aligned} I_{sing}^{(\varepsilon)} &:= -\frac{1}{64\pi^4}\cdot\frac{1}{\varepsilon}, \\ I_{fin}(p^2;\mu) &:= \frac{i}{64\pi^4}\left(\gamma - \int_0^1 dx\, \ln\left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2}\right]\right), \end{aligned}}$$

entonces podemos escribir

$$(\lambda')^2 \operatorname{reg}_\varepsilon(\hat{\Delta}_F^2)(p) = \lambda^2\left(i I_{sing}^{(\varepsilon)} + I_{fin}(p^2;\mu)\right)$$

Tomando la transformada de Fourier inversa, obtenemos una versión "regularizada" del producto $\Delta_F(x)\Delta_F(x)$:

$$\lambda^2 \operatorname{reg}_\varepsilon\left[\Delta_F(x)^2\right] := \lambda^2 \mathcal{F}^{-1}\left(\operatorname{reg}_\varepsilon \hat{\Delta}_F^2(p)\right)(x)$$

$$= \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2}\int d^4p\, e^{-ix\cdot p}\left(i I_{sing}^{(\varepsilon)} + I_{fin}(p^2;\mu)\right)$$

$$= i(2\pi)^2\lambda^2 I_{sing}^{(\varepsilon)}\,\delta(x) + \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2}\int d^4p\, e^{-ix\cdot p} I_{fin}(p^2;\mu)$$

Si ahora definimos

$$\boxed{(\Delta_F^2)_{fin}(x) := \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4p\, e^{-ix\cdot p}\, I_{fin}(p^2;\mu),}$$

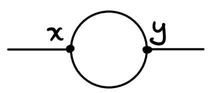
entonces podemos escribir:

$$\lambda^2 \operatorname{reg}_\varepsilon\left[\Delta_F(x)^2\right] = i(2\pi)^2\lambda^2 I_{sing}^{(\varepsilon)}\,\delta(x) + \lambda^2(\Delta_F^2)_{fin}(x)$$

Si tomamos el límite $\varepsilon \to 0$, la "constante" $I_{sing}^{(\varepsilon)} \propto \frac{1}{\varepsilon}$ va a diverger. Sin embargo, $(\Delta_F^2)_{fin}(x)$ será una cantidad bien definida.

Volvamos nuevamente al operador de scattering. El término de orden 2 que nos interesa es

$$\frac{(-i)^2}{2!}\, 18\, \lambda^2 \int d^4x \int d^4y\, (\Delta_F(x-y))^2 :\varphi(x)\varphi(y): ,$$

representado en el espacio de configuración con el diagrama 

.

Si reemplazamos $(\Delta_F(x-y))^2$ por $\operatorname{reg}_\varepsilon\left[\Delta_F(x-y)^2\right]$, obtenemos una expresión que es la suma de un término <u>singular</u> más un término que da una contribución finita al diagrama:

$$\frac{(-i)^2}{2!} 18\, \lambda^2 \int d^4x \int d^4y\, \mathrm{reg}_\varepsilon \left[\Delta_F(x-y)^2 \right] :\varphi(x)\varphi(y): \quad =$$

$$= \frac{(-i)^2}{2!} 18\, \lambda^2 \int d^4x \int d^4y \left(i(2\pi)^2\, I_{sing}^{(\varepsilon)}\, \delta(x-y) + (\Delta_F^2)_{fin}(x-y) \right) :\varphi(x)\varphi(y): \; =$$

$$= \frac{(-i)^2}{2!} 18\, \lambda^2 \int d^4x \int d^4y\; i\,(2\pi)^2\, I_{sing}^{(\varepsilon)} \underbrace{:\varphi(x)\,\delta(x-y)\,\varphi(y):}_{\text{operador cuasi-local.}} \; +$$

$$+ \frac{(-i)^2}{2!} 18\, \lambda^2 \int d^4x \int d^4y\, (\Delta_F^2)_{fin}(x-y) :\varphi(x)\varphi(y):$$

Notemos ahora que al reducir las integrales de dos a una (haciendo uso de la distribución $\delta(x-y)$) vemos que el primer término tiene la misma forma de un término de orden 1 (una contribución a $S^{(1)}$). De hecho, el "Lagrangiano de interacción" en este caso sería de la forma $\alpha \varphi^2$, donde α es una constante (divergente en el límite $\varepsilon \to 0$) que es proporcional a $I_{sing}^{(\varepsilon)}$

$$\frac{(-i)^2}{2!} 18\, \lambda^2 \int d^4x \int d^4y\, (2\pi)^2 (i)\, I_{sing}^{(\varepsilon)} :\varphi(x)\,\delta(x-y)\,\varphi(y): \quad =$$

$$= (-i) \int d^4x \left[\frac{18\, \lambda^2}{2} \cdot (2\pi)^2\, I_{sing}^{(\varepsilon)} :\varphi(x)^2: \right]$$

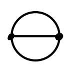
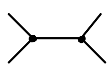
Si redefinimos parametros de masa haciendo

$$m^2 = m_*^2 + \delta m^2,$$

entonces, al llevar el término δm^2 a la parte de interacción del Lagrangiano $\left(\mathcal{L}_{ct} = -\frac{1}{2}\delta m^2 \varphi^2 \right)$, obtendremos las siguientes contribuciones a S a orden ≤ 2 (solo teniendo en cuenta el diagrama de interés en orden 2):

$$S^{(\leq 2)} = \mathbb{1} - i \int d^4x \left(\lambda :\varphi(x)^3: + \frac{1}{2}\delta m^2 :\varphi(x)^2: + \frac{18\lambda^2}{2} \cdot (2\pi)^2 I_{sing}^{(\varepsilon)} :\varphi(x)^2: \right)$$

$$+ \frac{(-i)^2}{2!} 18\lambda^2 \int d^4x \int d^4y \, (\Delta_F^2)_{fin}(x-y) :\varphi(x)\varphi(y):$$

$+$ [términos adicionales de orden λ^2 que estamos ignorando por el momento, como  ,  .]

Juntando los coeficientes de $:\varphi(x)^2:$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\delta m^2 + 18\lambda^2 (2\pi)^2 I_{sing}^{(\varepsilon)} \right)$$

Podemos hacer que este término se cancele si escogemos adecuadamente el valor de δm:

$$0 \overset{!}{=} \delta m^2 + 18\lambda^2 (2\pi)^2 I_{sing}^{(\varepsilon)} = \delta m^2 - 18\lambda^2 (2\pi)^2 \frac{1}{64\pi^4} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\iff \delta m^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3\lambda}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$