Regularización Dimensional

Renormalización Perturbativa

Andrés Reyes

Esfera $(n-1)$-dimensional $\rightarrow$ $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$

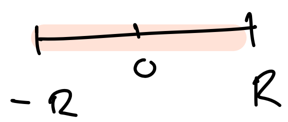
$\hookrightarrow$ superficie de una n-bola de radio R.

$n=3 \rightarrow$ superficie de una esfera 2-dim

$\hookrightarrow$ volumen de la bola correspondiente: $\Omega_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$

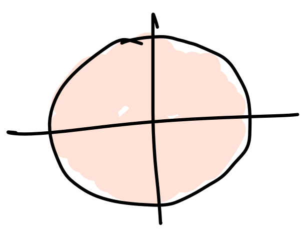
Volumen $\rightarrow$ $\Omega_n(R)$

$n=1$



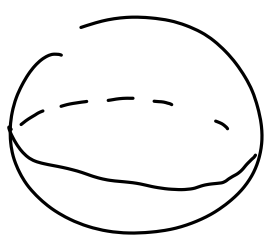
$\longrightarrow$ $\Omega_1(R) = 2R$

$n=2$



$\longrightarrow$ $\Omega_2(R) = \pi R^2$

$n=3$

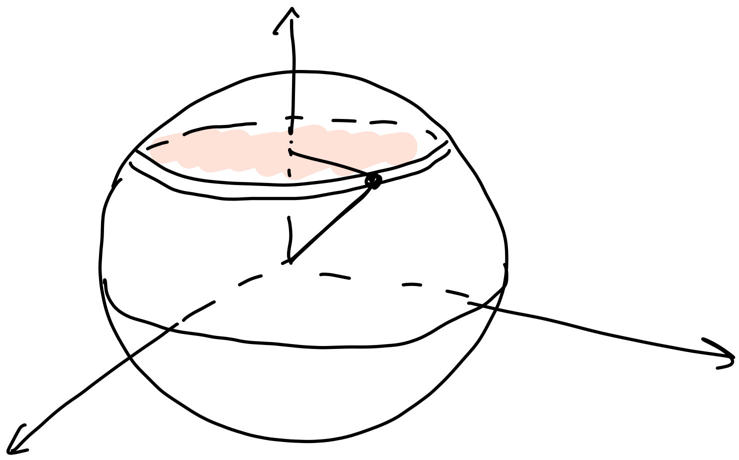


$\longrightarrow$ $\Omega_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$

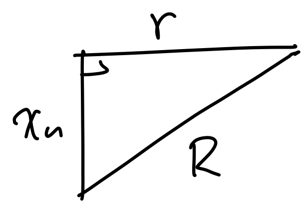
$n \rightarrow$ general $\longrightarrow$ $\Omega_n(R) = \alpha_n R^n$

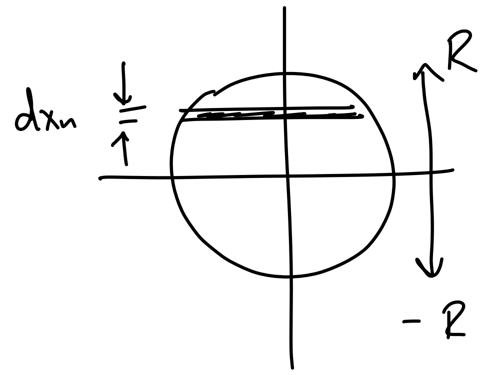
$\alpha_n = \, ?$ $\quad \alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = \pi,$

$\alpha_3 = 4\pi/3, \ldots$



$$r^2 \equiv x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = R^2 - x_n^2$$





dim $= n-1$ $(x_1, \ldots, x_{n-1})$

$$\longrightarrow \quad \Omega_n(R) = \int_{-R}^{R} \Omega_{n-1}(r)\, dx_n$$

$$= \alpha_{n-1} \int_{-R}^{R} (R^2 - x_n^2)^{(n-1)/2}\, dx_n$$

$$= \alpha_{n-1} R^n \int_{-1}^{1} (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dz$$

integrar por partes

$$\Longrightarrow$$

$$\Omega_n(R) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} R^n$$

$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \rightsquigarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

<u>Idea</u>: Vamos a imaginar que queremos calcular el "volumen" de una bola, en dimensión "d", donde $d \in \mathbb{R}_+$. Para $d = 1, 2, 3, \ldots$ el resultado debe coincidir con $\Omega_d(R)$

$R = 1$ $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

Andrés Reyes

Regularización dimensional.

La función gamma

Dada la relevancia de la función gamma para el método de regularización dimensional, comenzaremos discutiendo algunas de sus propiedades.

En su forma más general, la función gamma está definida como una función de una variable compleja. Sea, por lo tanto, $z \in \mathbb{C}$.

- Para $\operatorname{Re} z > 0$, definimos $\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$.

  Si escribimos $z = x + iy$ y tenemos en cuenta que

  $t^z = e^{(\log t) z} = e^{x \log t}\, e^{iy \log t} \longrightarrow |t^z| = e^{x \log t} = t^x$; $|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{x-1}$,

  vemos que $\int_1^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ es convergente para $\operatorname{Re} z > 0$.

  Por otro lado, mientras se cumpla $x > 0$, tenemos $t^{x-1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^x}{x}\right)$,

  luego $\int^1 e^{-t} t^{x-1} dt = e^{-t} \frac{t^x}{x}\Big|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 e^{-t} \frac{t^x}{x} dt < \infty$.

De hecho, la integral que define a $\Gamma(z)$ no solo es convergente para $\operatorname{Re} z > 0$, sino que determina una función analítica en dicho semiplano.

- Usando integración parcial, tenemos que ($\operatorname{Re} z > 0$)

  $$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^z dt = -\cancelto{0}{t^z e^{-t}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty z\, t^{z-1} e^{-t} dt = z\,\Gamma(z)$$

  $\searrow$

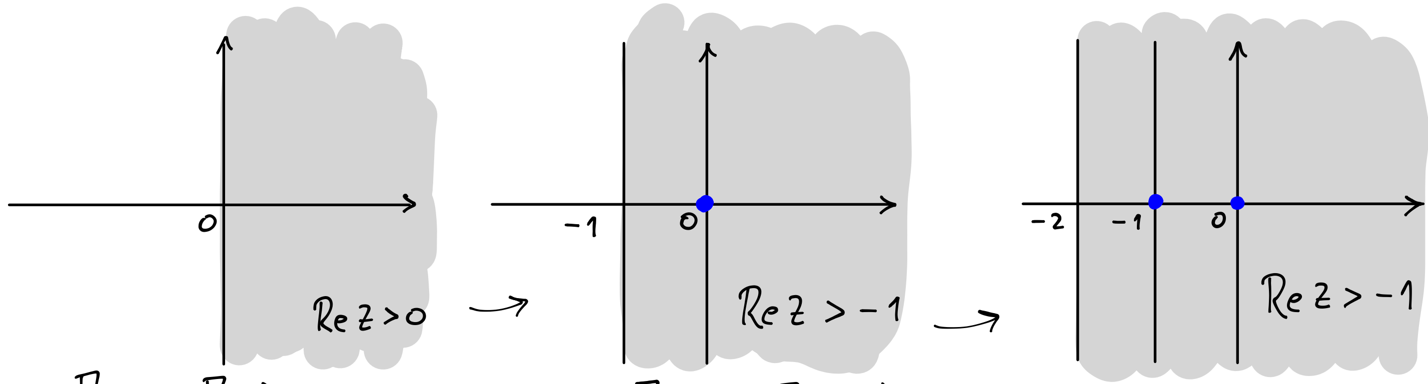
  $$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z), \quad \text{para } \operatorname{Re} z > 0.$$

  Como $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$, obtenemos, a partir de

  $n\,\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$, que para $n \in \mathbb{N}_+$, $\Gamma(n+1) = n!$

- Para extender $\Gamma(z)$ a la región $\mathrm{Re}\, z \leq 0$, buscando mantener la relación $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, definimos una secuencia de funciones Γ_k $(k=0,1,2,\dots)$ de tal forma que $\Gamma_0 = \Gamma$ (definida sobre $\mathrm{Re}\, z > 0$) y que Γ_{k+1} tenga un dominio de definición que contenga al de Γ_k.

La siguiente figura ilustra la idea:



$\Gamma_0(z) := \Gamma(z)$ $\qquad$ $\Gamma_1(z) := \dfrac{\Gamma_0(z+1)}{z}$ $\qquad$ $\Gamma_2(z) := \dfrac{\Gamma_1(z+1)}{z}$

$z\,\Gamma_0(z) = \Gamma_0(z+1) \longrightarrow \Gamma_0(z) = \dfrac{\Gamma_0(z+1)}{z}$ $\qquad$ Polo en $z=0$ $\qquad$ Polos en $z=0,-1$.

problemas en $z=0$

De esta forma podemos extender $\Gamma(z)$ a todo $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$

$\longrightarrow$ $\Gamma(z)$ tiene polos simples en $z=0,-1,-2,-3,\dots$

Otra forma de ver esto es así:

Comenzamos con $\Gamma_0(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t}$. A continuación calculamos

$$\int_0^1 dt\, t^{z-1} e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 dt\, t^{k+z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+z)}$$

y escribimos

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{(z+k)} + \int_1^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t},$$

con lo cual vemos que Γ extiende a Γ_0, dando lugar a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en $z=-k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Los residuos en dichos polos están dados por $(-1)^k/k!$.

Regularización Dimensional

La siguiente es una fórmula integral relevante:

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\, \pi^{D/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}}$$

$\longrightarrow$ Condición para la convergencia de la integral: $D < 2n$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = -\int_{i\infty}^{-i\infty} dk^0 \int \frac{d^{D-1} k}{(k_0^2 - (\vec{k}^2 + s) + \underbrace{i\varepsilon}_{0})^n}$$

$K_0 = -it$

$$= +i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \frac{d^{D-1} k}{(-1)^n (t^2 + (\vec{k}^2 + s))^n}$$

$$= i(-1)^n \int \frac{d^{D-1} k}{(\vec{k}^2 + s)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2/(\vec{k}^2 + s))^n} \cdot \frac{\sqrt{\vec{k}^2 + s}}{\sqrt{\vec{k}^2 + s}}$$

$$= i(-1)^n \int \frac{d^{D-1} k}{(\vec{k}^2 + s)^{n-1/2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{(1 + \lambda^2)^n}}_{= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n - 1/2)}{\Gamma(n)} \quad (n > 1/2)}$$

$$= i(-1)^n \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n - 1/2)}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{dk\, k^{D-2}}{(k^2 + s)^{n-1/2}} \underbrace{\int d\Omega_{D-1}}_{= \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}}$$

$\Longrightarrow$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{d^D k}{(k^2-s+i\varepsilon)^n} = i\,(-1)^n \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)}\,\frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}\underbrace{\int_0^\infty \frac{dk\; k^{D-2}}{(k^2+s)^{n-1/2}}}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle s^{\frac{1}{2}(D-2n)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)\Gamma(n-D/2)}{2\Gamma(n-1/2)}}$$

$\searrow$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{d^D k}{(k^2-s+i\varepsilon)^n} = i\,(-1)^n \sqrt{\pi}\,\frac{\cancel{\Gamma(n-1/2)}}{\Gamma(n)}\,\frac{\cancel{2}\pi^{(D-1)/2}}{\cancel{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}}\,\frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}\Gamma(n-D/2)}{\cancel{2}\cancel{\Gamma(n-1/2)}\; s^{n-D/2}}$$

$$= i\,(-1)^n\,\frac{\pi^{(D-1)/2}\;\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)\; s^{n-D/2}}$$

Verifiquemos la posición de los polos para verificar signos:

$\longrightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{z^2-\alpha+i\varepsilon}\quad , \quad \text{suponer}\quad \alpha>0\,,\quad 0<\varepsilon\ll 1$$

Polos de f: $\quad \alpha - i\varepsilon = \sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}\, e^{i\varphi}\,, \qquad \cos\varphi = \alpha/\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}$

$$\sin\varphi = -\varepsilon/\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}$$

$\searrow$ $$(\alpha-i\varepsilon)^{1/2} = \pm\,(\alpha^2+\varepsilon^2)^{1/4}\, e^{i\varphi/2}$$

Usando $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$, $\sin\frac{\varphi}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$, tenemos:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\alpha/\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}} \approx 1$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}}} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\left(1+\varepsilon^2/\alpha^2\right)^{1/2} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}}\right)} \approx -\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{\alpha\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}}}$$

$$\approx -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\alpha}$$

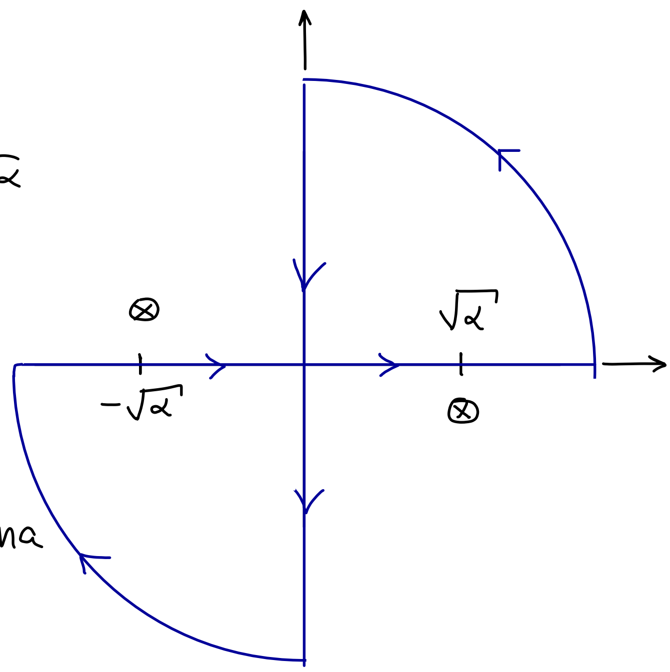
$$z^2 \overset{!}{=} \alpha - i\varepsilon \longrightarrow z \approx \pm\sqrt{\alpha}\left(1 - i\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right)$$

$\longrightarrow$ <u>Polos:</u> $z_+ = \sqrt{\alpha} - i\dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{\alpha}}$

$$\varepsilon' = \varepsilon/_{2\sqrt{\alpha}}$$

$$z_- = -\sqrt{\alpha} + i\,\varepsilon/_{2\sqrt{\alpha}}$$

$\to \sqrt{\alpha} + i\varepsilon' \;,\; -\sqrt{\alpha} - i\varepsilon'$ $\rightsquigarrow$



$\to$ Vemos que el signo de $i\varepsilon$ determina la dirección del contorno. Tenemos entonces que se tiene

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\frac{d^Dk}{(k^2-s\pm i\varepsilon)^n} = \pm i\,\pi^{D/2}(-1)^n\frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)}\frac{1}{s^{n-D/2}}} \qquad (1)$$

Parametrización de Feynman

- $$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dz \, \frac{1}{[a(1-z)+bz]^2} \longleftarrow$$ se obtiene por integración directa.

- En el caso general:

$$\frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_n} = \Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} \frac{dz_n}{[a_0 + (a_1-a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1}) z_n]^{n+1}} \qquad (2)$$

Para obtener esta identidad podemos proceder por inducción.

→ $n=1$ ✓

→ Asumir que es cierta para $n-1$, entonces tenemos:

$$\frac{1}{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}} = \Gamma(n) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-2}} \frac{dz_{n-1}}{[\alpha_0 + (\alpha_1-\alpha_0)z_1 + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) z_{n-1}]^n} \qquad (3)$$

Ahora podemos partir de la expresión

$$\Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} \frac{dz_n}{[a_0 + (a_1-a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1}) z_n]^{n+1}}$$

y realizar la integral sobre z_n ⟶

$$\int_0^{z_{n-1}} \frac{dz_n}{[a_0 + (a_1-a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1}) z_n]^{n+1}} = \frac{1}{(a_n - a_{n-1})} \int_0^{z_{n-1}(a_n - a_{n-1})} \frac{dx}{[\alpha + x]^{n+}}$$

$$\alpha = a_0 + (a_1 - a_0) z_1 + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) z_{n-1}$$

$$= \frac{-1}{n(a_n - a_{n-1})} (x+\alpha)^{-n} \Big|_0^{z_{n-1}(a_n - a_{n-1})}$$

$$= \frac{1}{n(a_n - a_{n-1})}\left(\frac{1}{[a_0 + (a_1-a_0)z_1 + \cdots + (a_{n-1}-a_{n-2})z_{n-1}]^n} - \frac{1}{[a_0 + (a_1-a_0)z_1 + \cdots + (a_{n-2}-a_{n-3})z_{n-2} + (a_n - a_{n-2})z_{n-1}]^n} \right)$$

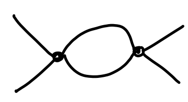
con lo cual obtenemos:

$$\Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} \frac{dz_n}{[a_0 + (a_1-a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}} =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{n(a_n-a_{n-1})} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-2}} \frac{dz_{n-1}}{[a_0 + (a_1-a_0)z_1 + \cdots + (a_{n-1}-a_{n-2})z_{n-1}]^n}$$

$$- \frac{\Gamma(n+1)}{n(a_n-a_{n-1})} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-2}} \frac{dz_{n-1}}{[a_0 + (a_1-a_0)z_1 + \cdots + (a_{n-2}-a_{n-3})z_{n-2} + (a_n-a_{n-2})z_{n-1}]^n} \Bigg)$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{1}{(a_n - a_{n-1})}\left(\frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1}} - \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{n-2} \cdot a_n} \right) = \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_n}$$

Para una teoría φ^4 tenemos, correspondiente al diagrama , la siguiente integral

no incluyo g, ni μ...

$$I^{(D)}(p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \underbrace{\frac{1}{((p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\eta)}}$$

$$= \int_0^1 dz \frac{1}{[((p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon)(1-z) + (k^2 - m^2 + i\varepsilon)z]^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - 2k\cdot p(1-z) + p^2(1-z) - m^2 + i\varepsilon)^2}$$

Para simplificar la integral realizamos un cambio de variable de la forma $k = \tilde{k} + a$, donde a se escoge de tal forma que se cancele el término lineal en $\tilde{k}$:

$$k = \tilde{k} + a \longrightarrow$$

$$k^2 - 2kp(1-z) + p^2(1-z) =$$

$$= (\tilde{k}+a)^2 - 2(\tilde{k}+a)p(1-z) + p^2(1-z)$$

$$= \tilde{k}^2 + 2\tilde{k}a + a^2 - 2\tilde{k}p(1-z) - 2ap(1-z) + p^2(1-z)$$

$$= \tilde{k}^2 + 2\tilde{k}\underbrace{(a-(1-z)p)}_{\overset{!}{=}0} + a^2 + (1-z)p(p-2a)$$

$$a = (1-z)p$$

$$= \tilde{k}^2 + (1-z)^2p^2 + (1-z)p^2 - 2(1-z)^2p^2$$

$$= \tilde{k}^2 + p^2((1-z) - (1-z)^2)$$

$$= \tilde{k}^2 + p^2(1-z)(z)$$

Volviendo a escribir k en lugar de $\tilde{k}$, obtenemos:

$$I^{(D)}(p) = \frac{1}{2}\int_0^1 dz \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + p^2z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dz \; \frac{i\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)} \frac{1}{(m^2 - p^2z(1-z))^{2-D/2}}$$

usar (1)

con $s = m^2 - p^2z(1-z)$

$$= \frac{i\pi^{D/2}}{2} \frac{\Gamma(2-D/2)}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \frac{1}{[m^2 - p^2z(1-z)]^{2-D/2}}$$

Para terminar, consideremos una identidad más, que generaliza (2):

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{P_i^{\nu_i}} = \frac{\Gamma(\nu)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\nu_i)} \int_0^1 \prod_{i=1}^{n} x_i^{\nu_i - 1}\, dx_i \; \frac{\delta(1 - \sum_i x_i)}{\left(\sum_i x_i P_i \right)^{\sum_{k=1}^{n} \nu_k}} \,.$$

La demostración de esta identidad, que nos da la forma más general de los parámetros de Feynman, se deja como ejercicio.