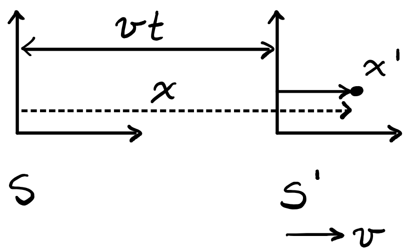
Los postulados de la Relatividad Especial tienen consecuencias inmediatas y muy importantes relacionadas con los conceptos de simultaneidad, orden temporal y, en general, causalidad. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo.

Consideremos una transformación como la que se muestra en la figura. Esta es una transformación de Galileo entre dos marcos inerciales (un "boost").



Los orígenes de ambos sistemas de referencia coinciden en $t = t' = 0$ y S' se desplaza hacia la derecha con velocidad v.

Las ecuaciones que describen esta transformación son

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned} \qquad (6)$$

En forma matricial, y usando la convención $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $\beta = v/c$, tenemos:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} .$$

Si hacemos $\Lambda_{Gal} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$, tenemos $\Lambda_{Gal}^T g \Lambda_{Gal} = g + \beta \begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq g$

Claramente, Λ_{Gal} no cumple con los postulados de la Relat. Especial. Tratemos de obtener la expresión adecuada para la transformación Λ que corresponde a la figura. Por un lado, debe cumplirse $\Lambda^T g \Lambda = g$. Por otro lado, esperamos que, para $\beta \ll 1$, se cumpla $\Lambda \approx \Lambda_{Gal}$.

Recordemos que en dim $= 1+1$, si escribimos $\Lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, entonces la condición $\Lambda^T g \Lambda = g$ da lugar a las siguientes identidades:

$$(1) \quad A^2 - C^2 = 1, \quad (2) \quad B^2 - D^2 = 1, \quad (3) \quad AB - CD = 0.$$

Notemos que de (1) se sigue que $\Lambda^0{}_0 \equiv A$ satisface $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$. Esto quiere decir que hay 2 posibilidades: $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ ó $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. Como $\Lambda \in L_+^\uparrow$, debe ser $A \equiv \Lambda^0{}_0 \geq 1$. Por lo tanto, si definimos

$\gamma := A$, tenemos $\longrightarrow \gamma \geq 1$.

Ahora, de (3) se sigue que $AB = CD$. Ya sabemos que $A > 0$. Además por (2) tenemos que $D^2 = 1 + B^2 > 0$ (ya que $B \in \mathbb{R}$). Por lo tanto podemos dividir entre A y entre D:

$$AB = CD \implies \frac{B}{D} = \frac{C}{A}.$$

Definamos, por lo tanto, $\beta := \frac{B}{D} = \frac{C}{A} \equiv \frac{C}{\gamma} \longrightarrow C = \beta\gamma$

Reescribiendo (1) en términos de $A = \gamma$ y $C = \beta\gamma$, obtenemos $\gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2}$.

Pero entonces, usando (2), se debe tener:

$D^2 - B^2 = 1 \quad ; \quad B = \beta D$ (por def. de β)

$\searrow D^2 - \beta^2 D^2 = 1 \implies D^2 = \gamma^2 \implies D = \pm\gamma.$

Tenemos, por lo tanto,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta D \\ \beta\gamma & D \end{pmatrix}$$

¿Qué pasa si escogemos $D = -\gamma$?

$$\rightarrow \operatorname{Det}\Lambda = \gamma D - \beta^2\gamma D = D\gamma(1-\beta^2) \overset{\text{si } D=-\gamma}{=} -1$$

Como $\Lambda \in L_+^\uparrow$, debe ser $D = \gamma$, así que $\Lambda \equiv L(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$.

Con $\beta = -v/c$, obtenemos el resultado que buscábamos.

Para una deducción más "heurística" de la forma explícita $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$, ver (por ejemplo) Kleppner & Kolenkow.

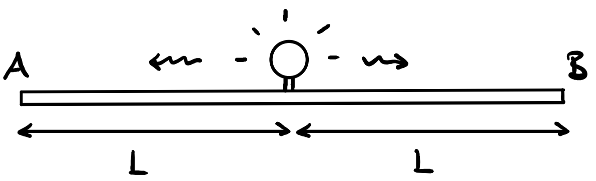
En el caso general (dim = 3+1), la fórmula para un "boost" de Lorentz con velocidad $\vec{v}$ ($\vec{\beta} = \vec{v}/c$) se puede escribir de forma compacta (usando una notación matricial autoexplicativa) de la siguiente forma:

$$L(\vec{\beta}) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\langle\vec{\beta}| \\ \hline -\gamma|\vec{\beta}\rangle & \mathbb{1}_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}|\vec{\beta}\rangle\langle\vec{\beta}| \end{array}\right)$$

Para ver la conexión con el caso 1+1, basta con tener en cuenta la identidad

$$1 + \frac{\gamma^2\beta^2}{1+\gamma} = \gamma.$$

<u>Ejemplo</u> (Simultaneidad).



Evento 1: luz llega al punto A

Evento 2: luz llega al punto B

Marco S (varilla en reposo):

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = -L, & t_1 = L/c \\ x_2 = L, & t_2 = L/c \end{array}\right\} \text{ eventos simultáneos}$$

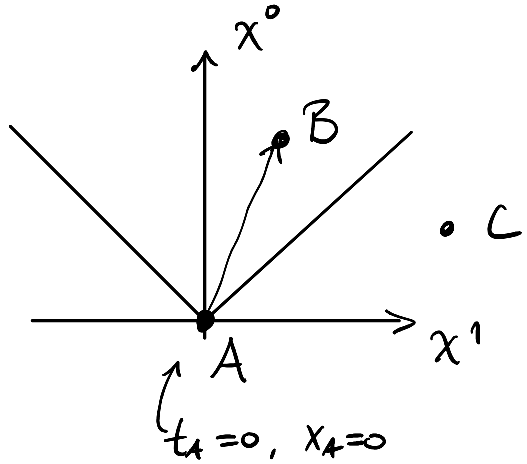
Marco S' (se desplaza con vel v resp. a S, como en el ejemplo anterior):

$$\left.\begin{array}{l} t_1' = \gamma(t_1 - x_1 v/c^2) = \gamma(L/c + Lv/c^2) \\ t_2' = \gamma(t_2 - x_2 v/c^2) = \gamma(L/c - Lv/c^2) \end{array}\right. \rightsquigarrow t_1' > t_2' \to \text{¡no son simultáneos!}$$

<u>Ejercicio</u>: Mostrar que, si usamos transf. de Galileo, los eventos 1 y 2 serán simultáneos en ambos marcos de referencia.

Relación entre eventos

De acuerdo a si existe o no conexión causal entre ellos. Según la figura, el evento A sucede <u>antes</u> que el evento B



A: (t_A, x_A)

B: (t_B, x_B)

$t_B > t_A$

<u>Pregunta</u>: ¿Es posible encontrar un marco de referencia para el cual el orden temporal de A y B se encuentre invertido?

→ Tratemos de encontrar $\beta \in \mathbb{R}$ tq para las nuevas coordenadas

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \quad \text{se cumpla} \quad t'_B < t'_A .$$

Tomando $x_A=0$, $t_A=0$, para que B se encuentre dentro del cono de luz futuro de A, se requiere que $|x_B - \cancel{x_A}^{\,0}| < c(t_B - \cancel{t_A}^{\,0})$

⤳ Si $x_B = L$, podemos escribir simplemente $L < c\,t_B$.

Nótese que esto es equivalente a pedir $c^2(t_B-t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 > 0$, i.e.,

$$(c\Delta t, \Delta x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} > 0 .$$

Si $t_A=0$, $x_A=0$ y $t_B>0$, entonces, en el sistema S', tendremos:

$$\begin{pmatrix} ct'_A \\ x'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct_A \\ x_A \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad t'_A = 0$$

$$\begin{pmatrix} ct'_B \\ x'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c t_B - \beta\gamma L \\ \gamma L - c\beta\gamma t_B \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \; t'_B = \gamma\left(t_B - \beta\frac{L}{c}\right)$$

Buscamos β t.q. $t'_B < 0$; es decir, $t_B - \beta\frac{L}{c} < 0$

$$\rightsquigarrow \; \beta > \frac{ct_B}{L} \underset{\uparrow \atop t_B > \frac{L}{c}}{>} \frac{c}{L}\cdot\frac{L}{c} = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta > 1 \text{ (i.e., \underline{no} se puede).}$$

<u>Observación</u> La ley de adición de velocidades hace evidente que no se puede sobrepasar el límite $\beta \leq 1$. En efecto (trabajando en $d = 1+1$ por simplicidad) si $L(\beta_1)$ y $L(\beta_2)$ son dos "boosts", al aplicarlos uno tras otro obtenemos la siguiente "ley de adición" de velocidades (<u>ejercicio</u>):

$$L(\beta_1)L(\beta_2) = L\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right).$$

Está claro que $\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \leq 1$ siempre que se tenga $\beta_i \leq 1$ $(i=1,2)$.

<u>El cono de luz</u>

Consideremos 2 eventos, A y B, y un sistema de referencia S en el cual $x^0_A = 0$, $\vec{x}_A = 0$. Si escribimos $x^0_B \equiv x^0$ y $\vec{x}_B \equiv \vec{x}$ entonces, al comparar ambos eventos, tenemos

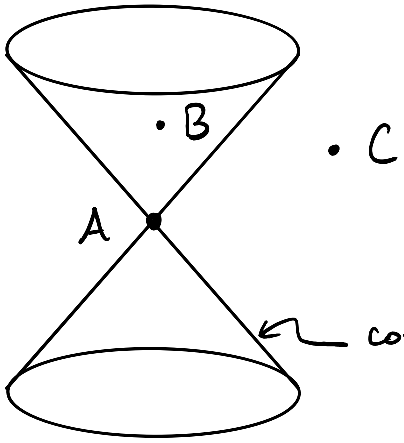
$$(x_A - x_B)^2 = x^2 = (x^0)^2 - \|\vec{x}\|^2$$

Dependiendo del valor de x^2 (positivo, negativo o cero), decimos que la relación entre A y B es de tipo

- Espacial, si $x^2 < 0$ • Temporal, si $x^2 > 0$ • Luz, si $x^2 = 0$

Las relaciones causales se deben siempre mantener en cualquier marco inercial para eventos que tienen una relación de tipo temporal ("time-like"). En contraste, el orden temporal de 2 eventos con una relación de tipo espacio ("space-like") se puede invertir. Esto muestra que entre dos eventos con separación de tipo espacio no hay ningún tipo de conexión causal.

cono de luz futuro de A



$(x_B - x_A)^2 > 0 \rightarrow$ hay conexión causal

$(x_C - x_A) < 0 \rightarrow$ no hay conexión causal.

cono de luz pasado de A.

Acerca de la notación

Como es usual en relat. especial, al escribir "x^2" lo que queremos decir es que x es un 4-vector $x = (x^0, \vec{x}) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y, definiendo $x_\mu := g_{\mu\nu} x^\nu$ (suma sobre índices repetidos) podemos escribir:

$$x^2 := x^\mu x_\mu = x^\nu x^\mu g_{\mu\nu} \equiv \langle x, g x \rangle$$

en la notación usada previamente...

Nótese que, al ser x^2 una cantidad <u>invariante</u>, su signo (en particular) no puede ser alterado por ninguna transf. de Lorentz. En efecto, sea $\Lambda \in L_+^\uparrow$ (luego $\Lambda^T g \Lambda = g$). Si $x' = \Lambda x$, tenemos:

$$x'^2 = \langle x', g x' \rangle = \langle \Lambda x, g \Lambda x \rangle = \langle x, \Lambda^T g \Lambda x \rangle = \langle x, g x \rangle = x^2$$

$$\rightarrow \quad x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu \rightarrow \underline{\text{invariante}}.$$