La serie de Dyson

Al estudiar el problema de scattering en mecánica cuántica no-relativista, mencionamos el hecho de que este es un problema dinámico y que, por lo tanto, su estudio debería estar basado en las propiedades de la evolución temporal, que en física cuántica se da a través de operadores unitarios.
El problema que estudiaremos a continuación nos permitirá aclarar este punto de forma que (i) se pueda justificar el ansatz basado en expansiones de ondas esféricas desde un punto de vista dinámico y (ii) sea posible estudiar el problema de scattering en teoría cuántica de campos con un formalismo <u>covariante.</u>

Antes de comenzar el análisis que nos llevará a la definición del operador de scattering, es conveniente recordar las definiciones de los diferentes "esquemas" de evolución temporal que se usan en mecánica cuántica.

- <u>El esquema de Schrödinger</u>

En este esquema, la evolución temporal se asigna a los <u>estados</u>, mientras que los operadores (i.e. observables) no dependen del tiempo.

$\rightarrow |\Psi(t)\rangle$: dependencia temporal determinada por la ec. de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \underset{\text{Hamiltoniano.}}{H} |\Psi(t)\rangle \qquad (1)$$

Si A es un operador que representa un observable, entonces su valor esperado en el estado $|\Psi(t)\rangle$ es $\rightarrow \langle A \rangle = \langle \Psi(t), A\,\Psi(t) \rangle$.

Supongamos, por simplicidad, que H no lleva ninguna dependencia temporal. En ese caso, la ec. (1) (ec. de Schrödinger) tiene como solución

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-itH/\hbar} |\Psi_0\rangle \qquad (2)$$

Definiendo el operador de evolución temporal (en el esquema de Schrödinger) como

$$U_S(t_2,t_1) := e^{-i(t_2-t_1)H/\hbar}, \qquad (3)$$

tenemos entonces que $|\Psi(t_2)\rangle = U_S(t_2,t_1)|\Psi(t_1)\rangle$

En general, el operador de evolución temporal satisface la siguiente ecuación, que es equivalente a la ec. de Schrödinger:

$$i\partial_t U_S(t,t_0) = H_S(t)\, U_S(t), \qquad (4)$$

sujeto a la condición inicial $U_S(t_0,t_0) = \mathbb{1}$.

($H_S \equiv$ Hamiltoniano en el esquema de Schrödinger).

aquí $t_0 = 0$, por simplicidad

Volvamos al caso en que H_S no depende de t, así que $U_S(t) = e^{-itH_S/\hbar}$

$$\to \langle A\rangle_\Psi(t) \equiv \langle \Psi(t), A\Psi(t)\rangle = \langle U_S(t)\Psi_0, A\, U_S(t)\Psi_0\rangle$$

$$= \langle \Psi_0, U_S(t)^\dagger A\, U_S(t)\Psi_0\rangle$$

→ Esta identidad nos motiva a introducir el esquema de Heisenberg, para el cual la dependencia temporal va en los observables (y ya no en los estados)

- Esquema de Heisenberg.

  → Estados no varían en el tiempo

  → Observables varían en el tiempo según $A(t) = U_S(t)^\dagger A\, U_S(t)$.

En particular, si H no depende de t, tenemos $A(t) = e^{itH/\hbar} A\, e^{-itH/\hbar}$.

Derivando la identidad anterior respecto a t, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{d}{dt} e^{itH/\hbar} A e^{-itH/\hbar} = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)]$$

$$\rightarrow \qquad i\hbar \dot{A} = [A, H] \qquad (5)$$

La ecuación (5) muestra claramente la similaridad que hay con la "regla" de evolución temporal en el formalismo Hamiltoniano de la mecánica clásica ($\rightarrow \dot{f} = \{f, H\}$).

El tercer esquema que nos interesa considerar (y que resultará ser el más relevante para nuestros propósitos) es el esquema de interacción, también conocido como esquema de Dirac $\longrightarrow$

- <u>Esquema de Dirac</u>

Este esquema es particularmente conveniente cuando tenemos un Hamiltoniano que está compuesto aditivamente por dos términos: uno independiente del tiempo ($H_{s,0}$) y uno con una dependencia temporal explícita ($V_s(t)$). Así, sea

$$H_s = H_{s,0} + V_s(t) \qquad (6)$$

el Hamiltoniano del sistema, en el esquema de Schrödinger.

Para evitar confusiones, denotemos con $|\phi_s(t)\rangle$ al estado que da la evolución temporal en el esquema de Schrödinger. Es decir, $|\phi_s(t)\rangle$ es solución de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi_s(t)\rangle = H_s |\phi_s(t)\rangle, \qquad (7)$$

que a su vez es equivalente a $|\phi_s(t)\rangle = U_s(t,t_0)|\phi_s(t_0)\rangle$, con $U_s(t,t_0)$ solución a la ecuación

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_s(t,t_0) = H_s \, U_s(t) \qquad (8)$$

→ Nótese que debido a que H_s tiene una dependencia temporal (a través de $V_s(t)$), ya no es posible afirmar que el operador de evolución temporal (solución de la ec. (8)) es simplemente el exponencial del Hamiltoniano. En particular nótese que $V_s(t_1)$ y $V_s(t_2)$ (para $t_1 \neq t_2$) pueden perfectamente ser operadores que no conmutan entre sí!

Como la evolución temporal que genera el término $H_{s,0}$ es "armónica" (i.e. de la forma $e^{-itH_{s,0}/\hbar}$) resulta ser muy buena idea "sustraer" esta parte de la evolución temporal, para concentrarnos así en el efecto que tiene el término $V_s(t)$.

Para esto introducimos las siguientes nociones de "estado" y "observable" (en el esquema de Dirac):

$$(\hbar \equiv 1)$$

Estados ⟶ $$|\Psi_D(t)\rangle := e^{iH_{0,s}t}|\phi_s(t)\rangle \qquad (9)$$

Observables ⟶ $$A_D(t) := e^{iH_{0,s}t}A_s(t)e^{-iH_{0,s}t} \qquad (10) \qquad (\Rightarrow H_{0,D} = H_{0,s} \equiv H_0)$$

Para ver qué utilidad tienen las definiciones (9), (10), calculemos la derivada temporal de $|\Psi_D(t)\rangle$ ⟶

$$i\partial_t|\Psi_D(t)\rangle = (i\partial_t e^{iH_0t})|\phi_s(t)\rangle + e^{iH_0t}(i\partial_t|\phi_s(t)\rangle)$$

$$= -H_0 e^{iH_0t}|\phi_s(t)\rangle + e^{iH_0t}H_s|\phi_s(t)\rangle$$

$$= e^{iH_0t}(\underbrace{-H_0 + H_s}_{=V_s(t)})|\phi_s(t)\rangle$$

$$= e^{iH_0t}V_s(t)\underbrace{|\phi_s(t)\rangle}_{=e^{-iH_0t}|\Psi_D(t)\rangle} \Longrightarrow \boxed{i\partial_t|\Psi_D(t)\rangle = V_D(t)|\Psi_D(t)\rangle} \quad (11)$$

$$= \underbrace{e^{iH_0t}V_s(t)e^{-iH_0t}}_{=V_D(t)}|\Psi_D(t)\rangle$$

$\longrightarrow$ Vemos así que en el esquema de Dirac la evolución temporal se ha definido de tal forma que solo debemos concentrarnos en el efecto que tiene el término de interacción sobre la dinámica.

¿Cuál es el operador de evolución en este contexto?

$$|\Psi_D(t)\rangle = e^{iH_0 t}|\phi_S(t)\rangle = e^{iH_0 t}U_S(t,t_0)|\phi_S(t_0)\rangle$$
$$= \underbrace{e^{iH_0 t}U_S(t,t_0)e^{-iH_0 t_0}}_{\stackrel{!}{=}\, U_D(t,t_0)}\ \underbrace{e^{iH_0 t_0}|\phi_S(t_0)\rangle}_{|\Psi_D(t_0)\rangle}$$

Este cálculo justifica la siguiente definición (operador de evolución temporal, en el esquema de Dirac):

$$\boxed{U_D(t,t_0) = e^{iH_0 t}\,U_S(t,t_0)\,e^{-iH_0 t}} \qquad (12)$$

Está claro, por la forma como hemos definido los operadores de evolución en los 3 esquemas, que el valor esperado de un observable <u>no</u> depende del esquema en el que sea calculado:

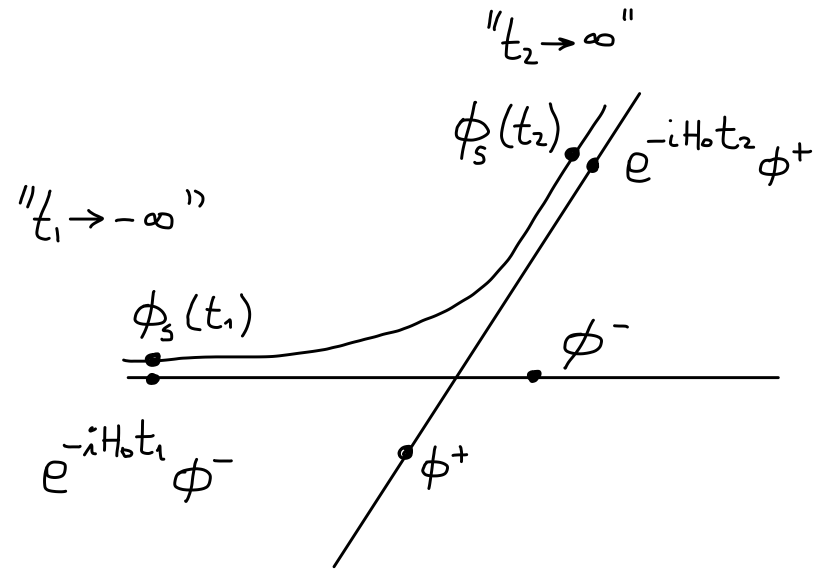
$$\langle \Psi_D(t), A_D(t)\Psi_D(t)\rangle = \langle e^{iH_0 t}\phi_S(t),\, e^{iH_0 t}A_S e^{-iH_0 t}e^{iH_0 t}\phi_S(t)\rangle$$

Dirac

$$= \langle \phi_S(t), A_S\,\phi_S(t)\rangle \quad \text{Schrödinger}$$
$$= \langle \phi_S(0), A_H(t)\,\phi_S(0)\rangle$$

Heisenberg.

Con los anteriores preparativos podemos ya pasar al tema que nos interesa, que es la obtención de una fórmula perturbativa para el operador de scattering.



$$H = H_0 + V$$

Queremos:

$$\phi_s(t_1) \approx e^{-iH_0t_1}\phi^-$$

$$\phi_s(t_2) \approx e^{-iH_0t_2}\phi^+$$

¿Cuál es la (amplitud de) probabilidad de que $\phi_s(t)$ sea de la forma "$e^{-iH_0t}\phi^+$" en el futuro remoto (i.e., asintóticamente) dado que en el pasado remoto era de la forma "$e^{-iH_0t}\phi^-$" ?

$$\mathcal{A}(t_2,t_1) := \langle e^{-iH_0t_2}\phi^+, \phi_s(t_2)\rangle = \langle e^{-iH_0t_2}\phi^+, U_s(t_2,t_1)\phi_s(t_1)\rangle$$

"$t_1 \to -\infty$"

$$\approx \langle e^{-iH_0t_2}\phi^+, U_s(t_2,t_1)e^{-iH_0t_1}\phi^-\rangle$$

$$= \langle \phi^+, \underbrace{e^{iH_0t_2}U_s(t_2,t_1)e^{-iH_0t_1}}_{U_D(t_2,t_1)}\phi^-\rangle$$

$$\hookrightarrow \mathcal{A} := \lim_{\substack{t_2\to\infty \\ t_1\to-\infty}} \langle \phi^+, U_D(t_2,t_1)\phi^-\rangle \qquad (13)$$

Definición

$$\boxed{S := \lim_{\substack{t_2\to\infty \\ t_1\to-\infty}} U_D(t_2,t_1)} \qquad (14)$$

"Operador de scattering"

La serie de Dyson

La ecuación diferencial que satisface el operador de evolución, en el esquema de Dirac es la siguiente:

$$i\partial_t U(t,t_0) = V(t)\, U(t,t_0), \qquad (15)$$

con condición inicial $U(t_0,t_0) = \mathbb{1}$.

En general no es posible solucionar esta ecuación de forma exacta.

Por esta razón consideraremos una solución perturbativa que se sigue naturalmente de la forma de (15), y que dará lugar a la (así llamada) "serie de Dyson" para el operador de scattering.

↪ Es claro que una forma equivalente de (15) es la siguiente ecuación integral:

$$U(t,t_0) = \mathbb{1} - i\int_{t_0}^{t} dt'\, V(t')\, U(t',t_0). \qquad (16)$$

Iterando (16) obtenemos:

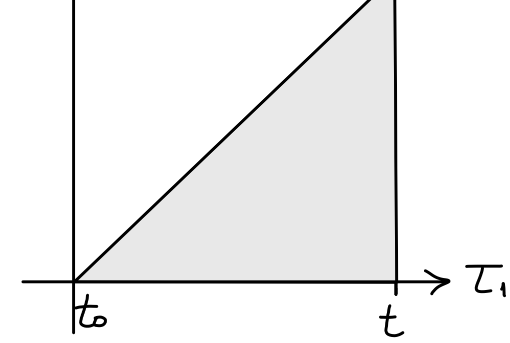
$$U(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\, V(\tau_1)\cdots V(\tau_n). \qquad (17)$$

→ Nótese que $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \cdots \geq \tau_n$. Este hecho nos permite escribir la serie que hemos obtenido de una forma más simétrica.

Mostraremos cómo hacer esto con un cálculo explícito para el caso $n=2$.

El caso general se deja como ejercicio.

Región de integración:



→ En vista de que $\tau_1 \geq \tau_2$, podemos escribir

$$\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2\, V(\tau_1)V(\tau_2) = \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{t} d\tau_2\, \Theta(\tau_1-\tau_2)\, V(\tau_1)\, V(\tau_2)$$

Por otro lado tenemos

$$\int_{t_0}^{t} d\tau_2 \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \; \theta(\tau_2-\tau_1) V(\tau_2) V(\tau_1) = \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{t} d\tau_2 \; \theta(\tau_1-\tau_2) V(\tau_1) V(\tau_2)$$

cambio de variable : $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$

Tenemos, por lo tanto, dos formas equivalentes de escribir la misma integral. Ambas tienen como dominio de integración el rectángulo $[t_0,t]\times[t_0,t]$. Sin embargo, dado que hemos introducido funciones escalón, el dominio de integración "efectivo" sigue siendo el mostrado en la figura.

Definamos el siguiente operador de orden temporal,

$$\mathcal{T}\big(V(\tau_1)V(\tau_2)\big) = \theta(\tau_1-\tau_2)V(\tau_1)V(\tau_2) + \theta(\tau_2-\tau_1)V(\tau_2)V(\tau_1),$$

con la obvia generalización al producto de n operadores:

Para n operadores $A_1(t_1), A_2(t_2), \dots, A_n(t_n)$ que dependen de etiquetas temporales $t_1, t_2, \dots, t_n$ y asumiendo que $t_i \neq t_j$ para $i \neq j$, definimos

$$\mathcal{T}\big(A_1(t_1)A_2(t_2)\cdots A_n(t_n)\big) := A_{\sigma(1)}(t_{\sigma(1)})\, A_{\sigma(2)}(t_{\sigma(2)}) \cdots A_{\sigma(n)}(t_{\sigma(n)}),$$

donde $\sigma \in S_n$ es aquella permutación tal que $t_{\sigma(1)} \geq t_{\sigma(2)} \geq \dots \geq t_{\sigma(n)}$.

De esta definición, junto con las identidades anteriores, obtenemos

$$\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{t} d\tau_2 \, V(\tau_1)V(\tau_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{t} d\tau_2 \, \mathcal{T}\big(V(\tau_1)V(\tau_2)\big).$$

La generalización de esta fórmula al caso de n-operadores (que dejamos como ejercicio), junto con (14) y (17), da lugar a la serie de Dyson:

$$\boxed{S = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \, \mathcal{T}\big(V(t_1)\cdots V(t_n)\big)}$$