El concepto de partícula de Wigner.

Anteriormente enunciamos el teorema de Wigner y mencionamos cómo, en algunos casos, las simetrías se pueden implementar a través de representaciones unitarias del grupo relevante.

Hay dos aspectos que dejaremos de lado por el momento, que son los siguientes:

(i) En realidad, el teorema de Wigner nos dice cómo implementar una operación de simetría que corresponde a un elemento $g \in G$. Un estudio más cuidadoso nos mostraría que (para el caso unitario) la relación $\widetilde{T}(g_1 g_2) = \widetilde{T}(g_1)\widetilde{T}(g_2)$ se puede garantizar tan sólo salvo un factor de fase. En lenguaje técnico, esto quiere decir que el grupo G actuará sobre $\mathcal{H}$ a través de una representación proyectiva. Si el tiempo lo permite, más adelante discutiremos este punto en detalle.

(ii) En el caso de una simetría que se implemente mediante operadores antiunitarios, veremos que es posible representar dichos operadores en términos de operadores unitarios, seguidos de una operación de conjugación compleja.

— // —

Por el momento, pasaremos a estudiar el grupo de rotaciones SU(2) y su relación con el spin del electrón, o más generalmente, de cualquier partícula <u>masiva</u>.

El grupo SU(2)

Recordemos la definición del grupo SU(2):

$$SU(2) = \{ M \in Gl(2,\mathbb{C}) \mid M^\dagger M = \mathbb{1}_2 \ , \ \mathrm{Det}\, M = 1 \}$$

Una matriz compleja 2×2, genérica, es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}.$$

Veamos entonces qué condiciones deben cumplir los parámetros a,b,c,d si queremos que M sea un elemento de SU(2).

- $\mathrm{Det}\, M = 1 \iff ad - bc = 1 \qquad (1)$

- $M^\dagger M = \mathbb{1}_{2\times 2} \iff$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar a & \bar c \\ \bar b & \bar d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & \bar a b + \bar c d \\ a\bar b + c\bar d & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} \iff$$

$$|a|^2 + |c|^2 = 1 \qquad (2)$$
$$|b|^2 + |d|^2 = 1 \qquad (3)$$
$$\bar a b + \bar c d = 0 \qquad (4)$$

Podemos ahora usar las ecs. (1)–(4) para obtener:

- Multiplicando (4) por $c \rightsquigarrow c\bar a b + |c|^2 d = 0$

$\hookrightarrow c\bar a b + (1 - |a|^2)\, d = 0$ (usando (2)),

$c\bar a b + d = |a|^2 d,$

$c|a|^2 b + ad = |a|^2 ad \overset{(1)}{=} |a|^2 + |a|^2 bc \Rightarrow ad = a\bar a$

Por lo tanto, si $a \neq 0$, debemos tener $d = \bar{a}$.

Por otro lado, si $a = 0$, de (2) y (4) obtenemos

$$|c|^2 = 1 \quad \text{y} \quad \bar{c}d = 0 \implies d = |c|^2 d = c\bar{c}d = 0 \implies d = 0.$$

Conclusión: $d = \bar{a}$, en general.

Las ecs. (1)–(4) se simplifican entonces a:

$$|a|^2 - bc = 1, \qquad |b|^2 + |a|^2 = 1$$
$$|a|^2 + |c|^2 = 1, \qquad \bar{a}(b + \bar{c}) = 0$$

Se sigue de la última ec. que $a \neq 0 \Rightarrow b = -\bar{c}$.

Ahora bien, si $a = 0$, tendremos

$bc = -1$, $|b| = 1 = |c|$, así que b es de la forma $b = e^{i\theta}$

y entonces $c = -e^{-i\theta} \Rightarrow b = -\bar{c}$, en general.

Los cálculos anteriores nos muestran que todo elemento de SU(2) debe ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ tales que } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \qquad (5)$$

—— // ——

Nuestro siguiente objetivo es establecer una relación entre el grupo SU(2) y el grupo de rotaciones SO(3).

Recordemos que los elementos de SO(3) corresponden a transformaciones R del espacio Euclídeo que preservan los ángulos entre vectores, y sus normas y la orientación del espacio $\longrightarrow$

$$SO(3) = \left\{ R \in M_3(\mathbb{R}) \mid \langle R\vec{x}, R\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \ \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3;\ \mathrm{Det}\, R = +1 \right\},$$

donde $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} x^i y^i$.

Para relacionar $SU(2)$ con $SO(3)$, haremos uso del siguiente "truco":

Vamos a representar cualquier vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ como una matriz hermítica de 2×2:

$$\text{Vectores en } \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow \text{Matrices hermíticas } 2\times 2$$

$$\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{X} = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 + i x^2 \\ x^1 - i x^2 & -x^3 \end{pmatrix}$$

Notemos ahora el siguiente hecho:

$$\boxed{\|\vec{x}\|^2 = -\mathrm{Det}\, \mathbb{X}}.$$

Así mismo, se tiene: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\mathbb{X}^\dagger \mathbb{Y})$.
(ejercicio)

Para $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, consideremos la transformación

$$\mathbb{X} \longmapsto \mathbb{X}' = A \mathbb{X} B.$$

Pregunta: ¿Qué condiciones debemos imponer sobre las matrices A, B de tal forma que $\mathbb{X}'$ siga representando un vector $\vec{x}' \in \mathbb{R}^3$?

Esto equivale a pedir que $\mathbb{X}'$ siga siendo una matriz hermítica:

$$(A\mathbb{X}B)^\dagger \overset{!}{=} A\mathbb{X}B \iff \mathbb{X}' \text{ representa un vector } \vec{x}' \in \mathbb{R}^3.$$

Esto nos lleva a la condición

$B^{\dagger} \mathbb{X} A^{\dagger} = A \mathbb{X} B$, que debe cumplirse para toda matriz hermítica $\mathbb{X}$.

En particular, estamos buscando transformaciones que preserven el producto interior, es decir, que correspondan a transformaciones ortogonales.

Teniendo en cuenta que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\mathbb{X}^{\dagger} \mathbb{Y})$, debemos pedir que se cumpla:

$\mathrm{Tr}(\mathbb{X}'^{\dagger} \mathbb{Y}') = \mathrm{Tr}(\mathbb{X}^{\dagger} \mathbb{Y})$, es decir,

$\mathrm{Tr}((A \mathbb{X} B)^{\dagger} (A \mathbb{Y} B)) = \mathrm{Tr}(\mathbb{X} \mathbb{Y}) \longrightarrow$

$\mathrm{Tr}(\mathbb{X} \mathbb{Y}) = \mathrm{Tr}(B^{\dagger} \mathbb{X} A^{\dagger} A \mathbb{Y} B) = \mathrm{Tr}(\mathbb{X} A^{\dagger} A \mathbb{Y} B B^{\dagger})$.

Es claro que podemos hacer que se cumpla la condición si asumimos $A^{-1} = A^{\dagger}$ y $B^{-1} = B^{\dagger}$, es decir, $A, B \in U(2)$. Así mismo obtenemos $\mathrm{Det}(AB) = 1$ (usando $\|x\|^2 = -\mathrm{Det}\, x$).

Así, podemos usar el grupo $SU(2)$ para generar transformaciones

$$\mathbb{X} \longmapsto \mathbb{X}' = g \mathbb{X} g^{-1} \quad ; \; g \in SU(2)$$

que, como hemos justificado, corresponden a transformaciones ortogonales de los vectores respectivos.

De hecho, se puede mostrar que al escoger transformaciones $\mathbb{X} \mapsto g \mathbb{X} g^{-1}$ con $g \in SU(2)$, obtenemos rotaciones para los vectores correspondientes.

Tenemos entonces una aplicación
$$\begin{aligned} \phi : SU(2) &\longrightarrow SO(3) \\ g &\longmapsto \phi(g) \equiv R_g \end{aligned}$$

definida de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{X} \arrow[r, "g"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{X}' = g\,\mathbb{X}\,g^{-1} \arrow[d, leftrightarrow] \\ \vec{x} \arrow[r, dashed] & \vec{x}\,' = R_g \vec{x} \end{tikzcd}$$

- $\vec{x},\ \vec{x}\,' \in \mathbb{R}^3$
- $g \in SU(2)$
- $R_g \in SO(3)$.

Comentarios:

- Como veremos luego, esta aplicación $\phi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ es sobreyectiva.
- Además, es fácil ver que se trata de un homomorfismo de grupos: $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\,\phi(g_2)$.
- Sin embargo, ϕ <u>no</u> es inyectiva. De hecho, notemos que $g \in SU(2) \Rightarrow -g \in SU(2)$ y, por la def. misma de ϕ, es evidente que $\phi(g) = \phi(-g)$.
- $\mathrm{Ker}\,\phi \cong \mathbb{Z}_2$ (el grupo de 2 elementos).
- Teniendo en cuenta la ec. (5), vemos que una posible parametrización está dada por

$$\alpha = e^{i(\psi+\varphi)} \cos\frac{\theta}{2}, \quad \beta = e^{i(\psi+\varphi)} \sin\frac{\theta}{2} \qquad (6)$$

Esta parametrización es particularmente adecuada para representar el homomorfismo $\phi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ de manera explícita, ya que los parámetros θ, φ, ψ se pueden relacionar fácilmente con ángulos de rotación (i.e. ángulos de Euler).

• Otra forma muy útil de parametrizar los elementos de SU(2) es:

$$SU(2) \ni g = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}, \qquad (7)$$

donde $\hat{n}$ es un vector unitario en $\mathbb{R}^3$, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (matrices de Pauli).

→ Ejercicio. Mostrar que se cumple la siguiente identidad:

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\left(\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\right) \qquad (8)$$

→ Ejercicio. Mostrar que, si en (7) se escoge $\hat{n} \equiv \hat{n}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, entonces se tendrá $\phi(g) \equiv R = e^{\theta\hat{n}_\varphi\cdot\vec{J}}$, con $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$, J_i siendo los generadores infinitesimales de SO(3).

Las representaciones unitarias de SU(2).

Resumiendo el análisis anterior, hemos visto que es posible parametrizar las matrices de SU(2) de la siguiente forma:

$$SU(2) \ni \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = e^{i(\psi+\phi)} \cos\frac{\theta}{2}, \quad \beta = e^{i(\psi-\phi)} \sin\frac{\theta}{2}. \qquad (9)$$

- Dado que la condición $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ nos muestra que SU(2) es homeomorfo a la 3-esfera S^3, podemos ver dicha parametrización como una parametrización de S^3, con coordenadas (ψ, ϕ, θ).

- Recordemos el homomorfismo $\phi : SU(2) \to SO(3)$.
  Bajo este homomorfismo, los parámetros (ψ, ϕ, θ) pueden ser interpretados en términos de una rotación en $\mathbb{R}^3$.

- Aquí, nuestro interés está en estudiar cómo implementar simetría rotacional en mecánica cuántica.

$SO(3) \ni R \leftarrow$ ¿Cómo asignar a este elemento un operador actuando en un espacio de Hilbert?

$\hookrightarrow$ Representaciones de grupos

$\rightarrow$ $T : G \longrightarrow Gl(V)$

$\quad g \longmapsto T(g)$, de tal forma que $T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2)$

Una aplicación T con esta propiedad se denomina representación del grupo G. El espacio vectorial V es entonces un espacio de representación para G.

Lo anterior está relacionado con el teorema de Wigner sobre simetrías (al menos para simetrías implementables a través de operadores lineales unitarios):

Teorema de Wigner (caso unitario) $\rightarrow$

G: grupo de simetría, $\mathcal{H}$: Espacio de Hilbert.

$\hookrightarrow$ $G \longrightarrow$ Operadores unitarios en $\mathcal{H}$

$g \longmapsto U(g)$

En general, sólo podremos garantizar que se cumpla

$$U(g_1 g_2) = \alpha(g_1, g_2)\, U(g_1)\, U(g_2) \qquad (10)$$

$\hookrightarrow$ factor de fase

$\longrightarrow$ representación proyectiva de G.

Este será el caso, en particular con el grupo $SO(3)$ (consecuencia de $\ker \phi = \mathbb{Z}_2$)

$\rightarrow$ Estos factores se pueden eliminar si pasamos a un grupo $\tilde{G}$ relacionado con G de forma similar a como $SU(2)$ se relaciona con $SO(3)$: $\phi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ homom., sobreyect.

$\searrow$ Podemos considerar a $SU(2)$ como el grupo de simetría rotacional en mecánica cuántica.

Pregunta: ¿Hay cosas que se puedan hacer con $SU(2)$ que no se puedan hacer con $SO(3)$? R/ SI

$\searrow$ En mecanica cuántica es necesario considerar al grupo $SU(2)$ (y no a $SO(3)$) como el grupo de simetrías rotacionales. Este es un hecho fundamental, que está detrás de nuestro entendimiento del spin del electrón.

Buscamos homomorfismos $D: SU(2) \longrightarrow Gl(\mathcal{H})$

$g \longmapsto D(g)$

- ¿Sobre qué espacios $\mathcal{H}$ podemos hacer esto?
- ¿Cómo encontrar todos los posibles "D's"?

1er intento: $SU(2)$ actúa naturalmente sobre $\mathbb{C}^2 \longrightarrow$ Tomar $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

$$D: SU(2) \longrightarrow Gl(\mathbb{C}^2) \qquad \text{(es lo más sencillo posible)}$$
$$g \longmapsto D(g) := g$$

Para $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, tomando una base de $\mathbb{C}^2 \to \{|+\rangle, |-\rangle\}$,

con $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, tenemos:

$$D(g)|+\rangle = g|+\rangle = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\bar{\beta} \end{pmatrix} = \alpha|+\rangle - \bar{\beta}|-\rangle$$

$$D(g)|-\rangle = g|-\rangle = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \beta|+\rangle + \bar{\alpha}|-\rangle$$

Para un vector arbitrario $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$, $|\psi\rangle = \psi_+|+\rangle + \psi_-|-\rangle$,
tenemos: $|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2 = 1$.

$$D(g)|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\psi_+ + \beta\psi_- \\ -\bar{\beta}\psi_+ + \bar{\alpha}\psi_- \end{pmatrix} = (\alpha\psi_+ + \beta\psi_-)|+\rangle + (-\bar{\beta}\psi_+ + \bar{\alpha}\psi_-)|-\rangle.$$

- Claramente (dado que $D(g) \equiv g$!) tenemos una representación de $SU(2)$, esta se llama la representación fundamental.

- Además, la representación es unitaria:
  Para el producto hermítico de $\mathbb{C}^2$ definido por

notaciones equivalentes

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\shortparallel} = \bar{x}a + \bar{y}b, \qquad \text{tenemos: } (U(g)\psi, U(g)\varphi) = (g\psi, g\varphi) =$$

$$= (\underbrace{g^\dagger g}_{=\mathbb{1}_2}\psi, \varphi) = (\psi, \varphi) \Rightarrow \text{Unitaria}$$

$(\psi, \varphi) \equiv \langle\psi|\varphi\rangle$, para $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

→ Se preservan las probabilidades de transición: $|\langle\psi|\varphi\rangle|^2 = |\langle U(g)\psi|U(g)\varphi\rangle|^2$

Ahora, consideremos la misma representación, pero en términos de los generadores infinitesimales:

$$SU(2) \ni g = e^{-i\theta\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}, \quad \hat{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad \|\hat{n}\| = 1, \quad \hat{n}\cdot\vec{\sigma} = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3$$

$$\theta \in [0, \pi] \qquad\qquad = \begin{pmatrix} n_3 & n_1 + in_2 \\ n_1 - in_2 & -n_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(Matrices de Pauli)}$$

Satisfacen: $\boxed{\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}}$ (11)

De la misma forma, para SO(3), tenemos:

$SO(3) \ni g = e^{\theta\hat{n}\cdot\vec{J}}$, J_1, J_2, J_3: generadores infinitesimales.

Satisfacen: $[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k$

- Al describir grados de libertad de spin ½, los observables correspondientes serán (combinaciones lineales de) las matrices de Pauli. Las relaciones de conmutación (11) dan lugar a incertidumbres en la medición simultánea de 2 de ellas: $\Delta\sigma_i \, \Delta\sigma_j > 0 \quad (i \neq j)$.

- Tanto los generadores infinitesimales de SO(3), $\{J_i\}_i$, como los de SU(2), $\{\sigma_i\}_i$, dan lugar a una estructura de álgebra de Lie.

Definición Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial, junto con una operación

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$
$$A, B \longmapsto [A, B]$$

que es lineal en cada entrada y tal que:

(i) $[A, B] = -[B, A]$

(ii) $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$ (identidad de Jacobi)

Ejemplo El espacio de funciones suaves sobre el espacio de fase de un sistema clásico, $C^\infty(P)$, con el corchete de Poisson, es un ejemplo de álgebra de Lie:

$$(C^\infty(P), \{\cdot,\cdot\}) \longrightarrow [f, g] \equiv \{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right),$$

$$f, g \in C^\infty(P) ; (q, p) \in P$$

— / —

Para $SU(2)$, tenemos:

Si $g \in SU(2)$, con $g = e^A$, entonces,

(i) $g^\dagger g = \mathbb{1}_2 \Rightarrow A = A^\dagger$

(ii) $\operatorname{Det} g = 1 \Rightarrow \operatorname{Tr}(A) = 0$.

$$\hookrightarrow \mathcal{L}ie(SU(2)) = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A = A^\dagger, \operatorname{Tr} A = 0 \}$$
$$= \text{espacio generado por } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

En este caso, $[A, B] = AB - BA$.

De forma análoga al caso de representaciones de un grupo, tenemos la noción de representación de un álgebra de Lie:

$$T: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) = \{L: V \to V \mid L \text{ lineal}\}$$

$$A \longmapsto T(A)$$

tal que
- T lineal
- $[T(A), T(B)] = T([A,B])$, $\forall A, B \in \mathfrak{g}$

$\to T$ es una representación de $\mathfrak{g}$.

—— // ——

Preguntas: Dada un álgebra de $(\mathfrak{g}, [.\,.])$, cómo encontrar todas las posibles representaciones $T: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$?

En el caso de $SU(2)$, tenemos, por ejemplo:

- $\dim V = 2 \to V^{(1/2)} := \mathbb{C}^2$

  Representación: $T^{(1/2)}: \mathcal{L}ie(SU(2)) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$

  $$\frac{\sigma_i}{2} \longmapsto T^{(1/2)}\left(\frac{\sigma_i}{2}\right) = \frac{\sigma_i}{2}$$

- $\dim V = 3 \to V^{(1)} := \mathbb{C}^3$

  Representación $T^{(1)}: \mathcal{L}ie(SU(2)) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$

  $$\frac{\sigma_i}{2} \longmapsto T^{(1)}\left(\frac{\sigma_i}{2}\right) = i J_i ,$$

  donde J_1, J_2, J_3 son los generadores infinitesimales de $SO(3)$

Para $\dim V > 3$?

Aunque en este momento no podemos explicar por qué, si podemos dar una construcción explícita de una representación

$$T^{(s)} \text{ sobre } V^{(s)} \cong \mathbb{C}^{2s+1}, \quad \text{con } s = \underbrace{1/2,\ 1}_{\text{ya las vimos}},\ 3/2,\ 2, \ldots$$

Es decir, representaciones de $\mathcal{L}ie(SU(2))$ sobre espacios de matrices en $\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \mathbb{C}^4, \ldots$

Para $s \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ $(s = 1/2, 1, 3/2, \ldots)$ consideramos el espacio $\mathbb{C}^{2s+1}$, con una base ortonormal de vectores $\{|s, s_3\rangle\}_{s_3 = -s, -s+1, \ldots, s}$.

Por ejemplo, para $s = 1/2$ tendremos $|1/2, 1/2\rangle$, $|1/2, -1/2\rangle$ $(\rightarrow V^{(1/2)} = \mathbb{C}^2)$.

Si $s = 1$, $2s+1 = 3 \longrightarrow V^{(1)} = \mathbb{C}^3$, con base
$\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$

En general, $V^{(s)} \cong \mathbb{C}^{2s+1}$, con base (ortonormal)

$$\underbrace{\{|s,-s\rangle, |s,-s+1\rangle, \ldots, |s,s\rangle\}}_{2s+1 \text{ vectores}}, \quad \text{con } \langle s, s_3 | s, s_3' \rangle = \delta_{s_3, s_3'}$$

Ahora, definimos:

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2), \quad T^{(s)}: \mathcal{L}ie(SU(2)) \longrightarrow gl(V^{(s)})$$
$$\frac{\sigma_3}{2} \longmapsto T^{(s)}\left(\frac{\sigma_3}{2}\right) \equiv J_3^{(s)},$$
$$\sigma_\pm \longmapsto T^{(s)}(\sigma_\pm) \equiv J_\pm^{(s)},$$

donde $J_3^{(s)} |s, s_3\rangle := s_3 |s, s_3\rangle$

$$J_\pm^{(s)} |s, s_3\rangle := \sqrt{s(s+1) - s_3(s_3 \pm 1)}\ |s, s_3 \pm 1\rangle$$

Ejercicio: calcular explícitamente las matrices $J_1^{(s)}, J_2^{(s)}, J_3^{(s)}$ para $s = 1/2$, $s = 1$ y verificar las relaciones de conmutación.

Habiendo obtenido representaciones del álgebra de Lie $\mathcal{L}ie(SU(2))$, podemos ahora construir representaciones del grupo, tomando la función exponencial de los elementos de representación del álgebra de Lie:

Para $g = e^{-i\theta \hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \in SU(2)$, definimos

$$\boxed{D^{(s)}(g) := e^{-i\theta\hat{n}\cdot\vec{J}^{(s)}}} \qquad \begin{aligned} D^{(s)}: \; SU(2) &\longrightarrow Gl(V^{(s)}) \\ g &\longmapsto D^{(s)}(g) \end{aligned}$$

↘ $D^{(s)}$ es una representación irreducible, unitaria, del grupo $SU(2)$, sobre un espacio de representación $V^{(s)}$ de $\dim = 2s+1$

→ $V^{(s)}$ es el espacio de estados que describe los grados de libertad de spin de una partícula (masiva) de spin $= s$.

→ Notemos que la representación $V^{(s)}$ está determinada por el valor s del spin.

Así mismo, los vectores base de $V^{(s)}$ llevan 2 "etiquetas" → $|s, s_3\rangle$, la primera es fija (s), es decir, no cambia bajo la acción del grupo, mientras que la segunda (s_3) sí lo hace:

$$D^{(s)}(g)|s, s_3\rangle = \sum_{s_3'=-s}^{s} D^{(s)}(g)_{s_3', s_3} |s, s_3'\rangle .$$

Por esta razón escribiremos $|[s], s_3\rangle$, de tal forma que $[s]$ sirva tan sólo como "etiqueta" de la representación.

Ya vimos cuáles son las representaciones unitarias e irreducibles del grupo SU(2). Vimos también cómo es posible expresar dichas representaciones en términos de los generadores infinitesimales del grupo. Una base para los generadores infinitesimales está dada, por ejemplo, por las matrices de Pauli, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, que a su vez generan el espacio de matrices 2×2 de traza igual a cero.

Para una partícula de spin "s", habíamos asociado una representación de SU(2), que llamamos $D^{(s)}$ (ó $T^{(s)}$ a nivel infinitesimal), en un espacio $V^{(s)} \cong \mathbb{C}^{2s+1}$.

Base de $V^{(s)} \longrightarrow \{ |[s], s_3\rangle \}_{s_3 = -s, -s+1, \dots, s}$

Etiqueta fija, que determina el valor del spin.

• El valor de s_3 depende del sistema de referencia (por ejemplo, corresponde a la proyección del spin a lo largo del eje z), mientras que el valor de s permanece fijo.

→ El spin "s" es una "etiqueta" de la representación $V^{(s)}$.

• Como hemos visto, si conocemos una representación unitaria del álgebra de Lie, podemos obtener, a partir de la aplicación exponencial, una representación unitaria del grupo de Lie correspondiente.

Ahora vamos a estudiar el espacio de estados de una partícula cuántica relativista, siguiendo un procedimiento similar al que se usó para estudiar los grados de libertad rotacionales (~ spin).

Es usual iniciar el estudio de sistemas cuánticos relativistas con una discusión detallada de las ecs. de Klein-Gordon y de Dirac. Sin embargo, estas ecs. no tienen, a priori, una interpretación física consistente (esto sólo sucede una vez son reinterpretadas en términos de "campos cuánticos"). Por esta razón comenzaremos más bien estudiando los espacios de representaciones del grupo de Poincaré que, como veremos, dan lugar a una interpretación adecuada de sistemas cuánticos relativistas elementales.

<u>El espacio de estados de una partícula relativista de spin "s" y masa "m" $(m>0)$:</u>

Recordemos el grupo de Poincaré, $\mathcal{P}$, que contiene, en particular, al grupo de rotaciones, al grupo de Lorentz $L_+^\uparrow$ y al grupo de traslaciones espacio-temporales:

$$\mathcal{P} = \{(\Lambda, a) \mid \Lambda \in L_+^\uparrow,\ a \in \mathbb{R}^4\},$$ con regla de multiplicación

$$(\Lambda', a') \cdot (\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a') \qquad (12)$$

Por el teorema de descomposición sabemos que todo $\Lambda \in L_+^\uparrow$ se puede escribir en la forma $\Lambda = L(\vec{v})\mathcal{R}$, donde $L(\vec{v})$ es una transf. pura ("boost") y $\mathcal{R}$ una rotación.

¿Cómo podemos construir un espacio de Hilbert sobre el que actúe el grupo de Poincaré?

Idea principal: cada escogencia de "parámetros" o "etiquetas" (m, s), donde $m>0$ representa la masa de una partícula y $s \in \frac{\mathbb{N}}{2}$ su spin, determina una representación unitaria, irreducible del grupo de Poincaré.

A diferencia del ejemplo anterior con $SU(2)$, los espacios de representación correspondientes serán de dimensión infinita. Esto es consecuencia del hecho de que el grupo de Poincaré <u>no</u> es compacto.

Wigner: 40's $\longrightarrow$ cálculo de las representaciones.

Buscamos operadores unitarios $U(\Lambda, a)$ actuando de forma irreducible en un espacio de Hilbert, de tal forma que se respete la regla de multiplicación (12) $\longrightarrow$
$(\mathcal{H})$

$$U((\Lambda,a)\cdot(\Lambda',a')) = U((\Lambda,a))\, U((\Lambda',a')) . \qquad (13)$$

Para comenzar el análisis vamos a considerar solamente elementos de $\mathcal{P}$ de la forma $(\Lambda, 0)$, es decir, comenzamos restringiéndonos a sólo $L_+^{\uparrow} < \mathcal{P}$.

Notación $\rightarrow$ $U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0)$.

En esto momento no estamos en posición de construir las representaciones, pero sí podemos describirlas. Comenzamos entonces por describir una base en el espacio de estados. Para esto, requerimos 2 parámetros m y s, cuyo significado ya hemos mencionado:

- Masa $\longrightarrow$ $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$
- Spin $\longrightarrow$ $s \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\}$

$\hookrightarrow$ Cada escogencia (m,s) determina una representación...

$\rightarrow$ Base para el espacio de estados $\longrightarrow$ dada por vectores de la forma

$$|[s],[m]; p, s_3\rangle \qquad (14)$$

componente 3 del spin

momento lineal de la partícula

- Los vectores de la forma (14) dan lugar a una base impropia del espacio de Hilbert, de forma similar a una base impropia $\{|p\rangle\}_p$; $(\langle x|p\rangle = e^{ipx})$ de ondas planas en el caso de $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.

- Por ahora no especificaremos el espacio de Hilbert. Para nuestros propósitos será suficiente con saber que los vectores de la forma (14) dan lugar a una base impropia.

Para $|[m],[s];p,s_3\rangle$ asumiremos que $s_3 \in \{-s,-s+1,\dots,s-1,s\}$ y que p es un 4-vector que pertenece al hiperboloide de masa m : $\underline{\underline{p^2 = m^2}}$.

El papel que juega en este contexto el parámetro m^2 es similar al que juega el parámetro $j(j+1)$ en la teoria del momento angular, donde se tiene que

$$J^2 |j,j_3\rangle = j(j+1)|j,j_3\rangle .$$

El operador J^2, que conmuta con los demás generadores infinitesimales de momento angular, se conoce como "operador de Casimir". En el caso que estamos estudiando, este papel lo toma el operador P^2, que al actuar sobre los vectores de la base, nos da

$$P^2 |\ \rangle = m^2 |\ \rangle .$$

$\rightarrow P = (P^0, \vec{P}) \rightarrow$ operadores de energia y momento: $\vec{P} = (P^1, P^2, P^3)$, $P^0 \equiv$ op. de energía.

Vemos entonces que la relación relativista entre masa, energía y momento lineal, no es otra cosa que una relación entre valores propios de operadores de representación, para una escogencia de operador de Casimir que corresponde al valor de m.

Tendremos entonces

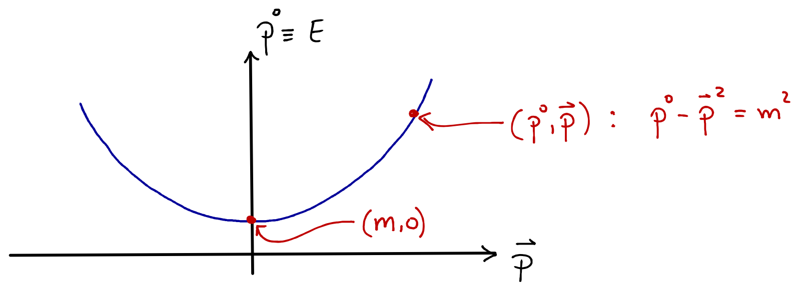
$$P^i |[m],[s];p,s_3\rangle = p^i |[m],[s];p,s_3\rangle , \qquad (15)$$

$$P^0 |[m],[s];p,s_3\rangle = E |[m],[s];p,s_3\rangle ,$$

$$\text{con} \quad E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2. \qquad (16)$$

Como E y $\vec{p}$ están correlacionados, podemos también escribir $\vec{p}$ en (14),(15), en lugar de $p = (E,\vec{p})$.

Podemos representar la relación (16) en términos del "hiperboloide de masa m":



Así, la transformación de un vector $|[m],[s];p,s_3\rangle$ se puede visualizar en términos de una transf. dentro de dicho hiperboloide.

Así, por ejemplo, el punto $(m,0)$ sobre el hiperboloide representa a cualquier estado que sea superposición de los vectores $\{|[m],[s];\mathring{p},s_3\rangle\}_{s_3=-s,\dots,s}$, donde $\mathring{p}\equiv(m,\vec{0})$, es decir, un estado de reposo de la partícula.

→ Si $L(\vec{v})$ es una transformación pura de Lorentz tal que

$$L(\vec{v})(m,\vec{0}) = (p^0, \vec{p}), \tag{17}$$

donde por lo tanto se debe tener $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$, entonces tendremos que

→ podemos también escribir $L(\vec{v}) \equiv L_p$

$$U(L(\vec{v}))|[m],[s];\mathring{p},s_3\rangle = |[m],[s];p,s_3\rangle. \tag{18}$$

Por otro lado, es claro que para una partícula (masiva) en estado de reposo, descrita por un vector de estado de la forma $|[m],[s],\mathring{p},s_3\rangle$ $(\mathring{p}\equiv(m,\vec{0}))$, el efecto de una rotación debe ser exactamente el que hemos estudiado, en términos de irreps de SU(2):

$$U(R)|[m],[s];\mathring{p},s_3\rangle = \sum_{s_3'} D^{(s)}(R)_{s_3',s_3}|[m],[s];\mathring{p},s_3'\rangle, \tag{19}$$

donde $R \in L_+^\uparrow$ es una rotación: $R = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & R \end{array}\right)$, $R \in SO(3)$

Nos hace falta ver cómo actúa una transf. $U(\Lambda)$, para Λ arbitrario, sobre un estado genérico $|[m],[s],p,s_3\rangle$.

$$\searrow U(\Lambda)|[m],[s];p,s_3\rangle \overset{(18)}{=} U(\Lambda)U(L_p)|[m],[s];\mathring{p},s_3\rangle$$

$$= U(\Lambda L_p)|[m],[s];\mathring{p},s_3\rangle$$

$$= U(L_{\Lambda p})\,U(L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda L_p)|[m],[s];\mathring{p},s_3\rangle.$$

Ahora, la combinación $L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda L_p$ es justamente una rotación (ejercicio!) que se denomina rotación de Wigner $\longrightarrow$

$$R_W := L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda L_p. \qquad (20)$$

Por lo tanto tenemos que

$$U(\Lambda)|[m],[s];p,s_3\rangle = U(L_{\Lambda p})\sum_{s_3'} D^{(s)}(R_W)\,|[m],[s];\mathring{p},s_3'\rangle$$

$$= \sum_{s_3'} D^{(s)}(R_W)\,|[m],[s];\Lambda p,s_3'\rangle$$

Esta es la regla de transformación (i.e. representación) que estábamos buscando:

$$\boxed{U(\Lambda)|[m],[s];p,s_3\rangle = \sum_{s_3'} D^{(s)}(R_W)\,|[m],[s];\Lambda p,s_3'\rangle} \qquad (21)$$