Cuantización canónica del campo escalar real

Campo de Klein-Gordon $\longrightarrow$ $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi = 0$.

Energía del campo $\longrightarrow$

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left(\dot{\varphi}(x)^2 + (\vec{\nabla}\varphi(x))^2 + m^2 \varphi(x)^2 \right) \geq 0. \qquad (1a)$$

Esta energía, al ser positiva, nos indica la solución a uno de los problemas que encontramos al tratar de interpretar las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon en términos de funciones de onda de probabilidad.

La interpretación física adecuada aparecerá tan pronto impongamos el postulado de cuantización canónica, según el cual el campo $\varphi(x)$ asume un carácter de operador. Luego de cuantizar, veremos que es natural considerar la expresión (1a) para H como la que corresponde al Hamiltoniano del sistema.

Para comenzar, recordemos la expansión en modos de Fourier que obtuvimos previamente para el campo de K-G real:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(f_p(x) a_p^* + f_p^*(x) a_p \right). \qquad (1b)$$

Vimos en detalle cuál es la relación entre los coeficientes de Fourier y las condiciones iniciales.

Pasemos ahora a la formulación del postulado de cuantización canónica.

Por analogía con el caso cuántico no-relativista, vamos a pensar en campo $\varphi(x)$ como un operador (dependiente de x), que denotaremos provisionalmente como $\Phi(x)$. La idea es análoga a la que nos lleva, en el caso no-relativista, a considerar las funciones de posición (x) y momento (p), como operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$ que satisfacen reglas de conmutación $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$.

Teniendo en cuenta que la familia de operadores $\{\Phi(x)\}_x$ está parametrizada por x, asumiremos que es posible definir operaciones como $\partial_\mu \Phi(x)$ y que, además, el campo cuántico $\Phi(x)$ también satisface la ec. de Klein-Gordon:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\underbrace{\Phi(x)}_{} = 0 . \qquad (2)$$

$\hookrightarrow$ operador, actuando en algún espacio de Hilbert (?)

La pregunta de cómo definir adecuadamente derivadas de la forma $\partial_\mu \Phi(x)$, teniendo en cuenta que $\Phi(x)$ es un "operador", la dejaremos sin responder... por ahora!

Es natural también pensar en que el operador $\Phi(x)$ actúe, de alguna forma, en un espacio de Hilbert. Esto realmente no es cierto, debido al carácter singular que, como veremos, posee el operador $\Phi(x)$. Sin embargo, se puede mostrar que $\Phi(x)$ puede ser entendido en el sentido de las distribuciones. Tendremos entonces que si f es una función test, $\Phi(f)$ será un operador bien definido, actuando en un espacio de Hilbert (espacio de Fock).

Por cuantización del "campo clásico" $\varphi(x)$ entenderemos, por lo tanto, una aplicación "$\wedge$" (no confundir con la transformada de Fourier) que lleva a $\varphi(x)$ en un "operador" $\hat{\varphi}(x) \equiv \Phi(x)$:

$$\wedge \; : \varphi \longmapsto \hat{\varphi} \equiv \Phi, \qquad (3)$$

de forma lineal y de forma que $\Phi(x)$ satisfaga la ecuación de Klein-Gordon (2)

Es de esperarse que los "operadores" $\Phi(x)$ y $\Phi(y)$ no conmuten cuando $x \neq y$.

Teniendo en cuenta que los datos iniciales necesarios para resolver $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi = 0$ son $\varphi(0,\vec{x})$ y $\dot{\varphi}(0,\vec{x})$, tiene sentido pensar que para solucionar la ecuación (2) necesitamos, como datos iniciales, no sólo los datos $\Phi(0,\vec{x})$ y $\dot{\Phi}(0,\vec{x})$, sino también los valores de todos los conmutadores

$$[\Phi(0,\vec{x}), \Phi(0,\vec{y})], \quad [\dot{\Phi}(0,\vec{x}), \dot{\Phi}(0,\vec{y})] \quad y \quad [\Phi(0,\vec{x}), \dot{\Phi}(0,\vec{y})]. \qquad (4)$$

Esta información inicial (a $t=0$), junto con el hecho de que Φ es solución de la ecuación de K-G, debe ser suficiente para determinar el valor de $\Phi(x)$, y por lo tanto del conmutador

$$[\Phi(x), \Phi(y)],$$

para x, y arbitrarios. ¿Qué valor asignar a los conmutadores (4)?

$\rightarrow$ Aquí es donde entra en juego el postulado de cuantización canónica, ya que el momento canónico conjugado de $\varphi(x)$ es justo

$$\pi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}. \qquad (5)$$

De forma análoga al postulado de cuantización en mecánica cuántica no relativista, según el cual observables $f(q,p)$ en el espacio de fase clásico son reemplazados por operadores $\hat{f}$ tales que

$$\{f,g\} \stackrel{\wedge}{\longmapsto} \frac{1}{i\hbar}[\hat{f},\hat{g}], \qquad (6)$$

donde $\{\,,\}$ denota el corchete de Poisson, en nuestra teoría del campo escalar real vamos a imponer la condición de que los operadores $\Phi(x) \equiv \hat{\varphi}(x)$ y $\Pi(x) \equiv \hat{\pi}(x) = \hat{\dot{\varphi}}(x)$ satisfagan las siguientes reglas de conmutación "canónicas" (a tiempos iguales):

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{C.C.R.} \qquad [\Phi(x),\Pi(y)]\Big|_{x^0=y^0} = i\hbar\,\delta(\vec{x}-\vec{y}), \\ &[\Phi(x),\Phi(y)]\Big|_{x^0=y^0} = 0 = [\Pi(x),\Pi(y)]\Big|_{x^0=y^0}. \end{aligned}} \qquad (7)$$

Teniendo en cuenta que para el campo escalar real se tiene $\pi = \dot{\varphi}$, podemos reescribir la primera relación de (13.7) de la siguiente forma:

$$[\Phi(t,\vec{x}),\dot{\Phi}(t,\vec{y})] = i\hbar\,\delta(\vec{x}-\vec{y}). \qquad (8)$$

Podemos usar estas relaciones de conmutación (CCR $\leftrightarrow$ "Canonical Commutation Relations") para calcular los conmutadores de los operadores $\hat{a}_p$ y $\hat{a}_p^*$.

En efecto, es natural pensar que al cuantizar sean los coeficientes de Fourier "a_p", "a_p^*" los que tomen carácter de operador y no la ondas planas f_p. Esto se refuerza al recordad que, según hemos visto, los coef. a_p se pueden expresar en términos de φ y $\dot{\varphi}$ y se muestra que estas expresiones son independientes de t.

El cálculo de las relaciones de conmutación para $\hat{a}_p$, $\hat{a}_q^*$ se facilita si tenemos en cuenta que

$$a_p = \int d^3\vec{x}\, f_p^*(x)\, (E_p\, \varphi(x) + i\, \dot{\varphi}(x)), \qquad (9a)$$

$$a_q^* = \int d^3\vec{x}\, f_q(x)\, (E_q\, \varphi(x) - i\, \dot{\varphi}(x)). \qquad (9b)$$

La identidad (9a) fue obtenida anteriormente. Por otro lado, la identidad (9b) se obtiene directamente a partir de la primera.

Con esto, podemos calcular:

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_q^*] = \left[\int d^3\vec{x}\, f_p^*(x) (E_p\, \Phi(x) + i\, \dot{\Phi}(x)), \int d^3\vec{y}\, f_q(y) (E_q\, \Phi(y) - i\, \dot{\Phi}(y)) \right] =$$

$$= \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{y}\, f_p^*(x)\, f_q(y) \left[(E_p\, \Phi(x) + i\, \dot{\Phi}(x)), (E_q\, \Phi(y) - i\, \dot{\Phi}(y)) \right] = \cdots$$

Para simplificar esta expresión, usamos el hecho de que las integrales de arriba pueden ser evaluadas en cualquier tiempo, así que escogemos $x^0 = y^0 = 0 \longrightarrow$

$$\cdots = \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{y}\, f_p^*(x)\Big|_{x^0=0} f_q(y)\Big|_{y^0=0} \Big(E_p E_q \cancelto{0}{[\Phi(0,\vec{x}), \Phi(0,\vec{y})]} - i\, E_p [\Phi(0,\vec{x}), \dot{\Phi}(0,\vec{y})]$$

$$+ i\, E_q [\dot{\Phi}(0,\vec{x}), \Phi(0,\vec{y})] + \cancelto{0}{[\dot{\Phi}(0,\vec{x}), \dot{\Phi}(0,\vec{y})]} \Big) =$$

$$= \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{y}\, \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{y}}}{(2\pi)^{3/2}} \Big(-(iE_p)(i\hbar\,\delta(\vec{x}-\vec{y})) \;+\; iE_q(-i\hbar)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \Big) =$$

$$= \frac{\hbar(E_p+E_q)}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \hbar\,(E_p+E_q)\left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{x}\cdot(\vec{q}-\vec{p})} d^3\vec{x} \right)$$

$$= \hbar(E_p+E_q)\,\delta(\vec{q}-\vec{p})$$

$$= 2\hbar E_p\,\delta(\vec{q}-\vec{p}).$$

Un cálculo similar nos muestra que se cumple

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_q] = 0,$$

así como

$$[\hat{a}^*_p, \hat{a}^*_q] = 0.$$

Hemos obtenido las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{a}_p , \hat{a}^*_q] = 2 E_p \delta(\vec{q} - \vec{p}) .$$

La similaridad con las relaciones de conmutación de un oscilador armónico cuántico son evidentes. De hecho, el requerimiento de que $\varphi(x)$ sea un campo real se ve reflejado en el requerimiento de que el campo cuántico $\Phi(x)$ sea autoadjunto: $\Phi(x)^\dagger = \Phi(x)$. Claramente esto implica que

$$\hat{a}^\dagger_p = \hat{a}^*_p .$$

Con esto obtenemos $\longrightarrow$ $\boxed{[\hat{a}_p , \hat{a}^\dagger_q] = 2 E_p \delta(\vec{q} - \vec{p})}$

Para interpretar estas relaciones es conveniente considerar la siguiente versión "simplificada":

$$[a_i , a^\dagger_k] = \delta_{ik} \quad , \quad [a_i , a_k] = 0 = [a^\dagger_i , a^\dagger_k] ,$$

donde i, k representan índices discretos.

Razonando de forma análoga al caso de 1 oscilador cuántico, es posible establecer que, si los operadores $a_i, a_i^\dagger$ actuan en un espacio de Hilbert, debe existir un vector $|0\rangle \in \mathcal{H}$ tal que $a_i|0\rangle = 0 \quad \forall i$.

Además, si $|\nu\rangle$ es un vector propio del operador "número de ocupación" definido como $\hat{N}_i := \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$, entonces $a_i^\dagger|\nu\rangle$ será vector propio de $\hat{N}_i$:

$$\text{Si} \quad \hat{N}_i|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle, \quad \text{entonces} \quad \hat{N}_i \hat{a}_i^\dagger|\nu\rangle = (\nu+1)|\nu\rangle.$$

Estos valores propios deben ser, necesariamente, números enteros positivos.

Con esto, podemos llegar a la siguiente interpretación:

El estado

$$\frac{(\hat{a}_{i_1}^\dagger)^{n_{i_1}}}{\sqrt{n_{i_1}!}} \frac{(\hat{a}_{i_2}^\dagger)^{n_{i_2}}}{\sqrt{n_{i_2}!}} \cdots \frac{(\hat{a}_{i_k}^\dagger)^{n_{i_k}}}{\sqrt{n_{i_k}!}} |0\rangle \qquad (*)$$

representa un estado de $N = n_{i_1} + n_{i_2} + \cdots + n_{i_k}$ partículas, n_{i_1} de las cuales se encuentran en el estado i_1, n_{i_2} en el estado i_2, y así sucesivamente. Como las relaciones de conmutación son bosónicas, estos estados son totalmente simétricos bajo intercambio de partículas.

En física del estado sólido es común describir sistemas de muchas partículas usando el (así conocido) formalismo de 2da cuantización.

En este formalismo, la función de onda de un sistema de N-electrones se representa en términos del número de electrones que ocupan cada uno de los niveles cuánticos en cuestión, de forma similar a como lo hemos escrito en la ec. (*) de la página anterior, pero con la diferencia de que en lugar de usar conmutadores, se usan anticonmutadores (para el caso de electrones). Esto con el objeto de "cumplir" con el principio de exclusión de Pauli.

Según este formalismo, el Hamiltoniano de un sistema de partículas no interactuantes será de la forma

$$H = \sum_i E_i a_i^{\dagger} a_i \quad ,$$

donde el índice "i" se refiere al estado cuántico con energía E_i.

Para ganar intuición con el formalismo de 2da cuantización, es recomendable estudiar ejemplos de sistemas de muchas partículas interactuantes. Aquí asumiremos que el lector tiene cierta familiaridad con este tipo de sistemas (interacción electrón-elect electrón-fonón, sistemas magnéticos, etc..).

Como veremos a continuación, lo más importante de resaltar, en nuestro caso, es que el postulado de cuantización que estamos considerando nos lleva, de forma casi directa, a una interpretación de los campos cuánticos en términos de partículas. Como veremos más adelante (campo escalar complejo), no sólo es inevitable que la descripción sea en términos de estados multi-partículas, sino que a cada partícula le corresponderá una anti-partícula.

Esta es una de las consecuencias inevitables de buscar una teoría cuántica que sea consistente con el principio de Relatividad.

Para obtener una interpretación en términos de partículas es conveniente recordar las expresiones para la energía,

$$H = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x} \left(\dot{\varphi}(x)^2 + (\vec{\nabla}\varphi(x))^2 + m^2 \varphi(x)^2 \right),$$

y el momento,

$$\underline{P}^i = \int d^3\vec{x} \left(\dot{\varphi}(x)\, \partial^i \varphi(x) \right),$$

del campo escalar real. Reemplazando el campo φ por su versión cuantizada $\underline{\Phi}$, se obtienen las siguientes expresiones para los operadores de energía, $\hat{H}$, y de momento, $\hat{\underline{P}}^i$:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\right) E_p \left(\hat{a}_p^{\dagger} \hat{a}_p + \hat{a}_p \hat{a}_p^{\dagger} \right) \\ \vec{\hat{\underline{P}}} &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\right) \vec{p} \left(\hat{a}_p^{\dagger} \hat{a}_p + \hat{a}_p \hat{a}_p^{\dagger} \right) \end{aligned}}$$

Veamos, como ~~ilust~~ ilustración, el cálculo de H $\longrightarrow$

Tenemos:

$$\Phi(x)^2\Big|_{x^0=0} = \int\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\int\frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\left(f_p(x)\hat{a}_p + f_p^*(x)\hat{a}_p^\dagger\right)\left(f_q(x)\hat{a}_q + f_q^*(x)\hat{a}_q^\dagger\right)\Big|_{x^0=0}$$

$$= \int\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\int\frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\left(e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}\hat{a}_p + e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}}\hat{a}_p^\dagger\right)\left(e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}}\hat{a}_q + e^{-i\vec{x}\cdot\vec{q}}\hat{a}_q^\dagger\right)\frac{1}{(2\pi)^3}$$

$$= \int\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\int\frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\Big(e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{q})}\hat{a}_p\hat{a}_q + e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{q})}\hat{a}_p\hat{a}_q^\dagger + e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{q})}\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q$$
$$+ e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{q})}\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q^\dagger\Big)\frac{1}{(2\pi)^3}$$

$$\left(\dot{\Phi}(x)^2 + (\vec{\nabla}\Phi(x))^2 + m^2\Phi(x)^2\right)\Big|_{x^0=0} =$$

$$= \int\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\int\frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\frac{e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{q})}}{(2\pi)^3}\left(-E_pE_q - \vec{p}\cdot\vec{q} + m^2\right)\hat{a}_p\hat{a}_q \;+$$

$$\int\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\int\frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\frac{e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{q})}}{(2\pi)^3}\left(E_pE_q + \vec{p}\cdot\vec{q} + m^2\right)\hat{a}_p\hat{a}_q^\dagger \;+$$

$$\int\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\int\frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\frac{e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{q})}}{(2\pi)^3}\left(E_pE_q + \vec{p}\cdot\vec{q} + m^2\right)\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q \;+$$

$$\int\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\int\frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\frac{e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{q})}}{(2\pi)^3}\left(-E_pE_q - \vec{p}\cdot\vec{q} + m^2\right)\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_q^\dagger$$

$$\dot{\Phi}(x)^2\Big|_{x^0=0} = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\left(-iE_p f_p(x)\,\hat{a}_p + iE_p f_p^*(x)\,\hat{a}_p^+\right) \times$$

$$\times \int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\left(-iE_q f_q(x)\,\hat{a}_q + iE_q f_q^*(x)\,\hat{a}_q^+\right)\Big|_{x^0=0}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{q}\,(i)^2\left(-e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}\hat{a}_p + e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}}\hat{a}_p^+\right)\left(-e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}}\hat{a}_q + e^{-i\vec{x}\cdot\vec{q}}\hat{a}_q^+\right).$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{q}\,\Big(-e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{q})}\hat{a}_p\hat{a}_q + e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{q})}\hat{a}_p\hat{a}_q^+ + e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{q})}\hat{a}_p^+\hat{a}_q$$
$$- e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{q})}\hat{a}_p^+\hat{a}_q^+\Big)$$

$$(\vec{\nabla}\Phi(x))^2\Big|_{x^0=0} = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\left(i\vec{p}\,f_p(x)\,\hat{a}_p - i\vec{p}\,f_p^*(x)\,\hat{a}_p^+\right)\cdot\int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\left(i\vec{q}\,f_q(x)\,\hat{a}_q - i\vec{q}\,f_q^*(x)\,\hat{a}_q^+\right)\Big|_{x^0=0}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\frac{(i)^2}{(2\pi)^3}\left(e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}\hat{a}_p - e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}}\hat{a}_p^+\right)\left(e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}}\hat{a}_q - e^{-i\vec{x}\cdot\vec{q}}\hat{a}_q^+\right)\vec{p}\,\vec{q}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d^3\vec{p}}{E_p}\int \frac{d^3\vec{q}}{E_q}\frac{(\vec{p}\cdot\vec{q})}{(2\pi)^3}\Big(-e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{q})}\hat{a}_p\hat{a}_q + e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{q})}\hat{a}_p\hat{a}_q^+ + e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{q})}\hat{a}_p^+\hat{a}_q$$
$$- e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{q})}\hat{a}_p^+\hat{a}_q^+\Big)$$

Ahora usamos la identidad $\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d^3\vec{x}$

para calcular:

$$\frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\left(\dot{\Phi}(x)^2 + (\vec{\nabla}\Phi(x))^2 + m^2\Phi(x)^2\right)\Big|_{x^0=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d^3\vec{p}}{(2E_p)^2}\left(-E_p^2 + \vec{p}^{\,2} + m^2\right)\hat{a}_p\hat{a}_p \quad +$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d^3\vec{p}}{(2E_p)^2}\left(E_p^2 + \vec{p}^{\,2} + m^2\right)\hat{a}_p\hat{a}_p^\dagger \quad +$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d^3\vec{p}}{(2E_p)^2}\left(E_p^2 + \vec{p}^{\,2} + m^2\right)\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p \quad +$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d^3\vec{p}}{(2E_p)^2}\left(-E_p^2 + \vec{p}^{\,2} + m^2\right)\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p^\dagger \quad .$$

Pero $-E_p^2 + \vec{p}^{\,2} + m^2 = 0$, mientras que $+E_p^2 + \vec{p}^{\,2} + m^2 = 2E_p^2$

$$\hookrightarrow H = \frac{1}{2}\int\frac{d^3\vec{p}}{4E_p^2}\left(2E_p^2\right)\left(\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p + \hat{a}_p\hat{a}_p^\dagger\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\right)E_p\left(\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p + \hat{a}_p\hat{a}_p^\dagger\right).$$

El cálculo para $\vec{P}$ es similar.

Como veremos más adelante, las expresiones así obtenidas para H y $\vec{P}$ darán lugar a ciertas divergencias, que en realidad no causarán problemas y que pueden ser eliminadas a través de una redefinición de H y $\vec{P}$ con la ayuda del "orden normal" (ver más adelante). Una vez implementada esta redefinición, el operador H toma la forma

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(E_p \right) \left(\hat{a}_p^{+} \hat{a}_p \right) .$$

Podemos entonces interpretar el estado $\hat{a}_p^{+} |0\rangle$ como un estado de una partícula de masa m, momento $\vec{p}$ y energía E_p.

El operador $\hat{a}_p^{+} \hat{a}_p$, aplicado a un estado multi-partícula, nos dice cuántas partículas hay en el estado "etiquetado" por los valores $m, \vec{p}$ y E_p.

Así mismo, el operador H aplicado a un estado multipartícula nos da (como valor propio) la energía total del estado: $\int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} E_p \, n_p$

número de ocupación.

Algunas consecuencias del postulado de cuantización.

Nuestro siguiente objetivo es calcular el conmutador $[\Phi(x), \Phi(y)]$ para tiempos arbitrarios. Esto nos llevará a la importante condición de "microcausalidad".

Partiendo de la expansión

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(f_p(x)\hat{a}_p + f_p^*(x)\,\hat{a}_p^{+} \right) ,$$

junto con las relaciones de conmutación en la forma $[\hat{a}_p, \hat{a}_q^{+}] = 2E_p\,\delta(\vec{p}-\vec{q})$, calculamos:

$$[\Phi(x), \Phi(y)] =$$

$$= \left[\int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(f_p(x)\hat{a}_p + f_p^*(x)\hat{a}_p^{+} \right), \int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q} \left(f_q(y)\hat{a}_q + f_q^*(y)\,\hat{a}_q^{+} \right) \right] =$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q} \Bigg(f_p(x) f_q^*(y) \underbrace{[\hat{a}_p, \hat{a}_q^{+}]}_{=2E_p\delta(\vec{p}-\vec{q})} + f_p^*(x) f_q(y) \underbrace{[\hat{a}_p^{+}, \hat{a}_q]}_{=-2E_p\delta(\vec{p}-\vec{q})} \Bigg) =$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(f_p(x) f_p^*(y) - f_p^*(x) f_p(y) \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)} \right) \Bigg|_{p^0=E_p}$$

La expresión anterior expresión es de gran importancia.

Por esta razón definimos →

- <u>Distribución causal de masa m</u> :

$$\boxed{\Delta_0(x;m) := \frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\left(e^{-iq\cdot x} - e^{iq\cdot x}\right)\Big|_{q^0=E_q}}$$

De esta forma, obtenemos:

$$\boxed{[\Phi(x), \Phi(y)] = i\,\Delta_0(x-y;m)}$$

Las siguientes propiedades de Δ_0 se dejan como ejercicio:

- $(\Box_x + m^2)\,\Delta_0(x) = 0$ $\qquad$ ($\Box_x = \partial_\mu\partial^\mu$, resp. a x).
- $\Delta_0(x)\big|_{x^0=0} = 0$
- $\dot{\Delta}_0(x)\big|_{x^0=0} = -\delta(\vec{x})$
- $\Delta_0(x) = 0$ para $\forall\, x^2 < 0$ (Microcausalidad)
- $\Delta_0(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4q\, e^{-iq\cdot x}\,\delta(q^2-m^2)\left(\theta(q^0) - \theta(-q^0)\right)$.