La ecuación de Dirac.

Vamos a discutir algunos aspectos relevantes de la ecuación de Dirac.

Recordemos que Dirac, al deducir su ecuación, estaba buscando una ecuación relativista de primer orden que, de cierta forma, se podía pensar como una "raiz cuadrada" de la ec. de Klein-Gordon.
(ver notas "El origen de las ecuaciones relativistas", p. 7)

$E^2 = m^2 + \vec{p}^{\,2} \longrightarrow$ Con $E = i\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ obtenemos

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 = m^2 \rightsquigarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi = 0 \quad \text{(Klein-Gordon)}$$

"Raiz cuadrada"? $\longrightarrow E = \pm\sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}$, $E > 0$

$\searrow E - \sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}} = 0 \rightsquigarrow$ proponer $\sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}} = \beta + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$

$$\longrightarrow \beta\alpha_i + \alpha_i\beta = 0, \quad \beta^2 = m^2, \quad \alpha_i^2 = 1, \quad \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\Longrightarrow (E + \beta + \vec{\alpha}\cdot\vec{p})(E - \beta - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}) = E^2 - m^2 - \vec{p}^{\,2}$$

$\alpha_i , \beta \longrightarrow$ <u>matrices</u> ¡

Ahora, el mismo argumento, pero en notación covariante:

Combinación lineal de los operadores $\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3 \longrightarrow \alpha^\mu \partial_\mu$; $\alpha^\mu = i\gamma^\mu$

porque $i\partial_\mu$ es autoadjunto.

$$E^2 = m^2 + \vec{p}^{\,2} \longrightarrow m = +\sqrt{E^2 - \vec{p}^{\,2}} \text{ "="} \ i\gamma^\mu \partial_\mu$$

$$\Rightarrow \qquad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

Entonces, como $0 = E^2 - m^2 - \vec{p}^{\,2} = \left(\sqrt{E^2-\vec{p}^{\,2}} + m\right)\left(\sqrt{E^2-\vec{p}^{\,2}} - m\right)$, la condición que se debe satisfacer es:

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

Pero

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = -\gamma^\nu\gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu - m^2$$

¿Cómo hacer entonces para que se cancelen los términos cruzados?

Por ejemplo $\longrightarrow \gamma^1\gamma^2 \partial_1\partial_2 + \gamma^2\gamma^1 \partial_2\partial_1 \overset{!}{=} 0 \qquad (*)$

Para soluciones ψ suaves se tendrá $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$, así podemos reescribir $(*)$ como

$$(\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1)\,\partial_1\partial_2 = 0 \implies \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1 = 0$$

La condición es, por lo tanto,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu},$$

donde "{ , }" denota el anti-conmutador

$$\{A, B\} := AB + BA.$$

→ Nótese que entonces tendremos

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu\right) = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu$$
$$= g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\mu\partial^\mu$$

Exploremos ahora algunas de las propiedades de la ec. de Dirac. $\rightarrow$

• La primera pregunta que nos hacemos es acerca de las posibles representaciones de las matrices γ^μ.

$\rightarrow$ Necesitamos 4 matrices. $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3,$ que satisfagan relaciones $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

Lo que tenemos aquí es un ejemplo de lo que se conoce como álgebra de Clifford. La teoría de representaciones de estas álgebras es interesante, y de gran relevancia en física

En un curso más avanzado sería recomendable estudiarla. Aquí nos vamos a conformar con exhibir un par de conjuntos de matrices que satisfacen las propiedades requeridas.

Comencemos por recordar que, para las matrices de Pauli se tiene:

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1}_2 \quad , \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad , \quad \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

Qué hay acerca de $\{\sigma_i, \sigma_j\}$?

Veamos: $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$

$$= \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij} + i\varepsilon_{jik}\sigma_k$$

$= 2\delta_{ij} \longrightarrow$ se parece a lo que buscamos

$\rightarrow$ Pero necesitamos una cuarta matriz. ¿Qué tal $\sigma_0 = \mathbb{1}_2$?

$\rightarrow$ no funciona porque necesitamos $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$ ¡

Sin embargo, notemos que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \mathbb{1}_2$ y que

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{funciona !}$$

Además, si $\sigma^2 = 1$, entonces $\begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos que el siguiente conjunto de matrices hace la tarea:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbb{0}_2 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \mathbb{0}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_2 & -\sigma^{(i)} \\ \sigma^{(i)} & \mathbb{0}_2 \end{pmatrix} \quad (i = 1,2,3 \; ; \; \sigma^{(i)} \equiv \text{Pauli}). \qquad (*)$$

Por razones que se harán evidentes más adelante, llamaremos a esta representación la representación de "altas energías".

Otra representación posible se conoce como la representación "estándar":

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{0}_2 \\ \mathbb{0}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_2 & \sigma^{(i)} \\ -\sigma^{(i)} & \mathbb{0}_2 \end{pmatrix}$$

- Busquemos ahora soluciones en forma de "ondas planas". Estas serán el análogo de las funciones $f_p(x) = \left.\frac{e^{-ip\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}}\right|_{p^0 \equiv E_p}$ que conocemos para la ecuación de Klein-Gordon.

↳ Ansatz: $\Psi_p(x) = u(p)\, e^{-ip\cdot x} + v(p)\, e^{ip\cdot x}$ $\qquad (**)$

Para que la función $\Psi_p(x)$ sea solución de la ec. de Dirac, debemos exigir $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi_p(x) = 0$. Esto nos lleva a

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\left(u(p)e^{-ip\cdot x} + v(p)e^{ip\cdot x}\right) = 0$$

$$\searrow (\gamma^\mu p_\mu - m)u(p)e^{-ip\cdot x} - (\gamma^\mu p_\mu + m)v(p)e^{ip\cdot x} = 0$$

Por independencia lineal de las funciones $e^{\pm ip\cdot x}$, la igualdad se cumple si y sólo si

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 \quad y \quad (\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0.$$

• Veamos ahora cómo se ven las ecuaciones anteriores en el marco de reposo si trabajamos en la representación "estándar":

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p)\Big|_{\vec{p}=0} = 0 \longrightarrow (\gamma^0 \underbrace{p_0}_{p_0 = m} - m)u(\vec{0}) = 0, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}\right] m\, u(\vec{0}) = 0$$

$$\searrow \begin{pmatrix} \mathbb{O}_2 & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow u_3 = u_4 = 0 \quad !$$

$$\Rightarrow u(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$, con φ un espinor de 2 componentes!

$\rightarrow \varphi \in \mathbb{C}^2$

Escribimos $\varphi = \lambda_+ \varphi^{(+)} + \lambda_- \varphi^{(-)}$, $\quad \varphi^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Algo similar sucede con $v(\vec{p}=0) \rightarrow v(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$

• Cómo pasamos ahora a un marco arbitrario?

→ Tenemos que saber cómo actúa una transf. de Lorentz sobre un espinor $u(p)$, $v(p)$.

Sin embargo, hay algo muy sencillo que podemos hacer para "adivinar" la respuesta:

Teniendo en cuenta que $(\gamma^\mu p_\mu \mp m)(\gamma^\nu p_\nu \pm m) = p^2 - m^2 = 0$, podemos inferir, a partir de $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$ y $(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0$, que $u(p)$ y $v(p)$ pueden ser de la forma

$$u(p) \sim (\gamma^\mu p_\mu + m)\, u(0) \quad , \quad v(p) \sim (\gamma^\mu p_\mu - m)\, v(0)$$

Esto resulta siendo cierto, de tal forma que al incluir factores de normalización adecuados, obtenemos:

$$u(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{p^0 + m}} \left(\gamma^\mu p_\mu + m \mathbb{1}_4\right) \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\vec{p}) = \frac{-1}{\sqrt{p^0 + m}} \left(\gamma^\mu p_\mu - m \mathbb{1}_4\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Con todo lo anterior, la expansión de Fourier de Ψ toma la forma:

$$\Psi_\alpha(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0} \left(a^{(r)}(\vec{p})\, u_\alpha^{(r)}(\vec{p})\, f_p(x) + b^{(r)*}(\vec{p})\, v_\alpha^{(r)}(\vec{p})\, f_p^*(x) \right)$$

$\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Ecuación de Dirac y el grupo de Lorentz

Habiendo recordado (nuestra versión) del argumento original con el que Dirac obtuvo su ecuación, pasaremos ahora a establecer una interesante relación entre la ec. de Dirac y las 2 representaciones irreducibles que el grupo (recubridor) de Lorentz posee en dimensión 2.

- El grupo (ortocrono, propio) de Lorentz se define como

$$L_+^{\uparrow} = \{ \Lambda \in M_4(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g \,,\; \Lambda^0{}_0 \geq 1 \,,\; \det \Lambda = 1 \}.$$

Los elementos de $L_+^{\uparrow}$ se pueden escribir en términos de los generadores infinitesimales J_i, K_i :

$$L_+^{\uparrow} \ni \Lambda = e^{-\theta \vec{J}\cdot\hat{n}} \, e^{\lambda \vec{K}\cdot\hat{v}} ,$$ donde $(\hat{n},\theta) \to$ rotación
$(\lambda,\hat{v}) \to$ "boost"

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k \quad , \quad [J_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k \quad , \quad [K_i, K_j] = -\varepsilon_{ijk} J_k .$$

Previamente hemos discutido la relación que existe entre $SU(2)$ y $SO(3)$. El grupo $SU(2)$ es el "recubridor universal" de $SO(3)$, y se cumple que $SU(2)/\mathbb{Z}_2 = SO(3)$, es decir, los grupos están en relacion $2 \leftrightarrow 1$.

Algo similar sucede con $L_+^{\uparrow}$. En este caso el recubridor universal de $L_+^{\uparrow}$ resulta siendo el grupo $SL(2,\mathbb{C})$:

$$SL(2,\mathbb{C}) := \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Det} A = 1 \} \cong Sp(2,\mathbb{C}).$$

Para ver que una matriz $A \in SL(2,\mathbb{C})$ en efecto representa una transformación de Lorentz, consideremos la extensión al espacio de Minkowski de la representación matricial de un vector:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \longleftrightarrow \mathbb{X} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = x^0 \mathbb{1} + \vec{x} \cdot \vec{\sigma}.$$

Fácilmente verificamos que $x_\mu x^\mu = \mathrm{Det}\, \mathbb{X}$.

Consideremos la acción:

$$\begin{aligned} SL(2,\mathbb{C}) \times M &\longrightarrow M \\ A \quad , \mathbb{X} &\longmapsto \mathbb{X}' := A \mathbb{X} A^\dagger. \end{aligned}$$

La condición para que una matriz $\mathbb{X}$ represente un vector en M (espacio de Minkowski) es que sea autoadjunta.

Como $(\mathbb{X}')^\dagger = (A \mathbb{X} A^\dagger)^\dagger = A \underset{\in M}{\mathbb{X}^\dagger} A^\dagger = \mathbb{X}'$, vemos que la acción está bien definida.

Para ver que representa una transformación de Lorentz, calculamos:

$$x'^\mu x'_\mu = \mathrm{Det}\, \mathbb{X}' = \mathrm{Det}(A \mathbb{X} A^\dagger) \overset{\mathrm{Det} A = 1}{=} \mathrm{Det}\, \mathbb{X} = x^\mu x_\mu$$

$\Rightarrow$ transf. Lorentz.

$$\begin{array}{ccc} SL(2,\mathbb{C}) & \ni & \pm A \\ \downarrow & & \downarrow \\ L^\uparrow_+ & \ni & \Lambda(A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x^\mu & \xrightarrow{\ \Lambda\ } & x^{\mu'} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{\ \pm A\ } & \mathbb{X}' \end{array} \qquad \mathbb{X}' = A \mathbb{X} A^\dagger$$

Explícitamente, la relación entre las matrices Λ y A está dada por:

$$\Lambda = e^{-\theta \vec{J}\cdot\hat{n}}\, e^{\lambda \vec{K}\cdot\hat{v}} \longleftrightarrow A(\Lambda) = \pm\, e^{i\theta \hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\, e^{\lambda \frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{v}}$$

Por las propiedades de las matrices de Pauli, tenemos:

$$e^{i\theta\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} = \cos\tfrac{\theta}{2} + i\sin\tfrac{\theta}{2}\ \hat{n}\cdot\vec{\sigma}$$

$$e^{\lambda\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{v}} = \cosh\tfrac{\lambda}{2} + \sinh\tfrac{\lambda}{2}\ \vec{\sigma}\cdot\hat{v}$$

- $SL(2,\mathbb{C})$ y el "tensor ε".

Definimos $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $A \in SL(2,\mathbb{C})$, entonces se verifica facilmente que:

$$A^T \varepsilon A = \varepsilon \qquad (*)$$

Nótese que $\varepsilon^T = \varepsilon^{-1} = -\varepsilon$

Si definimos, en $\mathbb{C}^2$, una forma antisimétrica a través de:

$$\langle u, v\rangle := u^T \varepsilon v = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

Vemos entonces que $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle \iff A^T\varepsilon A = \varepsilon$.

Por esta razón decimos que ε es un "tensor invariante".

De hecho, salvo un múltiplo, ε es el único tensor invariante de $SL(2,\mathbb{C})$.

Veamos: tratemos de construir una forma ($\mathbb{R}$-bilineal) que sea invariante $\longrightarrow$

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle := u^T \chi v, \quad \text{con} \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} \\ \chi_{21} & \chi_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{por encontrar})$$

Queremos $\langle\langle Au, Av \rangle\rangle \overset{!}{=} \langle\langle u, v \rangle\rangle \quad \forall A \in SL(2,\mathbb{C}), \ \forall u, v \in \mathbb{C}^2$.

Esto es equivalente a $A^T \chi A = \chi$.

Pero $\varepsilon \varepsilon^T = \mathbb{1}$, $A^T \varepsilon A = \varepsilon$, $\varepsilon^T = \varepsilon^{-1} = -\varepsilon$.

$$\hookrightarrow \chi = A^T \chi A = (A^T \varepsilon) \varepsilon^T \chi A = (\varepsilon A^{-1}) \varepsilon^T \chi A$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{-1} \chi = A^{-1} \varepsilon^T \chi A \Rightarrow A(\varepsilon^{-1}\chi) = (\varepsilon^{-1}\chi) A.$$

Como la representación $u \overset{A}{\longmapsto} Au$ es irreducible (ejercicio), se sigue que $\varepsilon^{-1}\chi = c\,\mathbb{1}$, para alguna constante (lema de Schur).

$\rightarrow$ Nótese que, en particular, cualquier forma invariante debe ser antisimétrica!

- Representaciones irreducibles 2-dimensionales de $SL(2,\mathbb{C})$.

Tipo I:

$$\rho: SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow Gl(2,\mathbb{C})$$
$$A \longmapsto \rho(A) := A$$

(forma equivalente: $A \mapsto \rho'(A) = (A^T)^{-1}$)

$\uparrow$

usar $A^T \varepsilon A = \varepsilon$

$\downarrow$

Tipo II:

$$R: SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow Gl(2,\mathbb{C})$$
$$A \longmapsto R(A) \equiv \hat{A} := (A^+)^{-1}$$

(forma equivalente: $A \mapsto R'(A) = A^*$)

→ Las representaciones "A" y "$\hat{A}$" son irreducibles, no unitarias e inequivalentes!
(ejercicio!)

• Paridad: A pesar de que $A \not\sim \hat{A}$, estas dos representaciones están relacionadas a través de la transformación de PARIDAD:

$$\mathcal{P}((x^0, \vec{x})) = (x^0, -\vec{x})$$

Sea $\mathbb{X}^P = P(\mathbb{X})$, i.e., si $\mathbb{X} = x^0 \mathbb{1} + \vec{x}\cdot\vec{\sigma}$, entonces

$$\mathbb{X}^P = x^0 \mathbb{1} - \vec{x}\cdot\vec{\sigma}.$$

Notemos ahora lo siguiente:

Para las matrices de Pauli vale → $\varepsilon^{-1}\sigma_i^*\varepsilon = -\sigma_i$.

Vemos entonces que

$$\boxed{\mathbb{X}^P = \varepsilon^{-1}\mathbb{X}^*\varepsilon}$$

Ahora bien

$$\hat{A} = (A^\dagger)^{-1} = ((A^T)^{-1})^* \overset{A^T\varepsilon A = \varepsilon}{=} (\varepsilon^{-1}A\varepsilon)^* = \varepsilon^{-1}A^*\varepsilon \equiv A^P.$$

$$\boxed{A \longleftrightarrow \hat{A} \quad \uparrow \text{ Transf. paridad!}}$$

• Conexión con la ecuación de Dirac.

Primero notemos que si $A = e^{i\theta\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{\lambda\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{v}}$, entonces

$$\hat{A} = (A^{+})^{-1} = \varepsilon^{-1} A^{*} \varepsilon = e^{i\theta\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{-\lambda\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{v}}.$$

En efecto, usando $\varepsilon^{-1}\sigma_i^{*}\varepsilon = -\sigma_i$, tenemos:

$$\hat{A} = \varepsilon^{-1} A^{*} \varepsilon = \varepsilon^{-1} e^{-i\theta\frac{\vec{\sigma}^{*}}{2}\cdot\hat{n}} e^{\lambda\frac{\vec{\sigma}^{*}}{2}\cdot\hat{v}} \varepsilon$$

$$= \varepsilon^{-1} e^{-i\theta\frac{\vec{\sigma}^{*}}{2}\cdot\hat{n}} (\varepsilon\, \varepsilon^{-1}) e^{\lambda\frac{\vec{\sigma}^{*}}{2}\cdot\hat{v}} \varepsilon$$

$$= e^{i\theta\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{-\lambda\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{v}}.$$

Consideremos ahora los 2 tipos de espinores:

Tipo I: $\xi \overset{A}{\longmapsto} A\xi$, $\xi \in \mathbb{C}^2$; Tipo II: $\eta \overset{A}{\longmapsto} \hat{A}\eta$, $\eta \in \mathbb{C}^2$

Definamos ahora

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Mostraremos ahora que ψ satisface la ecuación de Dirac, en el espacio de momento.

Para $\Lambda = e^{\lambda\vec{K}\cdot\hat{v}}$ tenemos:

i) $\vec{v} = \|\vec{v}\|\hat{v}$, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, $\cosh\lambda = \gamma = E/m$ $\longleftarrow$ $E = \gamma m$
$\tanh\lambda = \|\vec{v}\|$, $\sinh\lambda = \gamma\|\vec{v}\| = \|\vec{p}\|/m$ $\quad \vec{p} = \gamma m\vec{v}$

ii) $A(\Lambda) = e^{\lambda\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{v}} = \cosh\frac{\lambda}{2} + \sinh\frac{\lambda}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\hat{v}$

iii) $\hat{A}(\Lambda) = e^{-\lambda\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{v}} = \cosh\frac{\lambda}{2} - \sinh\frac{\lambda}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\hat{v}$

Usando $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cosh x}{2}}$, $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$, podemos escribir

$$\cosh \lambda = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \quad , \quad \sinh \lambda = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}}$$

$\Longrightarrow$

$$\cosh\frac{\lambda}{2} \pm \sinh\frac{\lambda}{2}\, \vec{\sigma}\cdot\hat{v} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\, \mathbb{1}_2 \pm \sqrt{\frac{E-m}{2m}}\, \vec{\sigma}\cdot\hat{v}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\sqrt{E+m} \pm \vec{\sigma}\cdot\hat{v}\sqrt{E-m}}{\sqrt{E+m}} \right) \sqrt{E+m}$$

$$= \frac{(E+m) \pm \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \ .$$

Ahora, si interpretamos la acción de $SL(2,\mathbb{C})$ sobre ξ y η como la acción de un "boost" (para $\Lambda = e^{\lambda\vec{u}\cdot\hat{v}}$) sobre espinores $\xi(0)$ y $\eta(0)$ que representan grados de libertad (de espín) en el sistema de reposo, tenemos:

$$\xi(p) = A(p)\,\xi(0) = \frac{(E+m)+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2(E+m)}}\,\xi(0)$$

$$\eta(p) = \hat{A}(p)\,\eta(0) = \frac{(E+m)-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2(E+m)}}\,\eta(0) \, .$$

Si tenemos en cuenta que

$$\left(E+m \pm \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right)\left(E+m \mp \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right) = 2m\,(E+m) \, ,$$

Llegamos a

$$\left(E+m - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right)\xi(p) = \sqrt{2m(E+m)}\;\xi(0) \qquad (*)$$

$$\left(E+m + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right)\eta(p) = \sqrt{2m(E+m)}\;\eta(0) \qquad (**)$$

El punto importante ahora es que en el sistema de reposo no podemos distinguir espinores de tipo I de los de tipo II

$\rightarrow \eta(0) = \xi(0)$

Con esto, tenemos que $(*) \equiv (**)$, así que

$$\left(E+m - \vec{\sigma}\cdot p\right)\xi(p) = \left(E+m + \vec{\sigma}\cdot p\right)\eta(p)$$

$\Rightarrow$

$$\left(E - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right)\xi(p) = -m\,\xi(p) + \left(E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right)\eta(p)$$

$$= -m\,\frac{\left(E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right)}{\sqrt{2(E+m)}}\eta(0) + \left(E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right)\frac{\left(E+m-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right)\eta(0)}{\sqrt{2(E+m)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}}\left(-mE - \cancel{m^2} - m\vec{\sigma}\cdot\vec{p} + E^2 + 2mE + \cancel{m^2} - \vec{p}^{\,2}\right)\eta(0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}}\left(mE + m^2 - m\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right)\eta(0)$$

$$= m\,\eta(p)$$

Un resultado similar se obtiene para η, dando lugar a las siguientes ecuaciones $\longrightarrow$

$$\xi(p) = \frac{E + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m}\,\eta(p)$$

$$\eta(p) = \frac{E - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m}\,\xi(p)$$

Escritas en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} -m & E + \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ E - \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(p) \\ \eta(p) \end{pmatrix} = 0 .$$

Con $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ y $\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$,

la ecuación toma la forma

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi = 0 .$$

Esta es la ecuación de Dirac en el espacio de momento!

Hasta ahora, lo que hemos aprendido acerca de la relación entre la ecuación de Dirac y el grupo $SL(2,\mathbb{C})$, se puede resumir de la siguiente forma:

- 2 representaciones irreducibles de $SL(2,\mathbb{C})$ (espinores "tipo I" y "tipo II")
  - Tipo I: $\rho : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow Gl(2,\mathbb{C})$, $A \longmapsto \rho(A) := A$ (una repn. equivalente es $A \mapsto (A^T)^{-1}$)
  - Tipo II: $R : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow Gl(2,\mathbb{C})$, $A \longmapsto R(A) \equiv \hat{A} := (A^\dagger)^{-1}$ (repn. equiv: $A \mapsto A^*$)

  Las relaciones entre estas representaciones se pueden obtener usando la relación $\varepsilon = A^T \varepsilon A$, donde $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es el tensor invariante.

- La transformación de paridad $P(x^0, \vec{x}) = (x^0, -\vec{x})$ toma la forma

$$\mathbb{X}^P = \varepsilon^{-1} \mathbb{X}^* \varepsilon,$$

  donde $\mathbb{X} = x^0 \mathbb{1}_2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x}$ es la representación, como matriz 2×2, del cuadrivector $x = (x^0, \vec{x})$.

  Esto nos permite ver que los espinores tipo I y II están relacionados entre sí a través de una transformación de paridad $\longrightarrow$ $\boxed{\hat{A} = \varepsilon^{-1} A^* \varepsilon}$

- Si $\xi \equiv \phi_R$ es un espinor de tipo I y $\eta \equiv \phi_L$ uno de tipo II, con $\phi_R(p) = A(p)\phi_R(0)$ y $\phi_L(p) = \hat{A}(p)\phi_L(0)$, hemos dejado como ejercicio mostrar que $\Psi := \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}$ es un espinor de Dirac (en el espacio p), es decir, que se cumple

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi = 0.$$

Conviene resaltar ahora que estas representaciones, a pesar de ser irreducibles, no son unitarias. Esto es consecuencia del hecho de que el grupo $SL(2,\mathbb{C})$ no es compacto.

Para una representación unitaria de un grupo G, digamos

$$\begin{aligned} U : G &\longrightarrow Gl(\mathbb{C}^k) \\ g &\longmapsto U(g) \end{aligned}$$

, se tiene (por definición) que con $\langle\, ,\rangle$ siendo el producto hermítico usual en $\mathbb{C}^k$, se cumple

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \langle U(g)\vec{x}, U(g)\vec{y}\rangle \quad \forall\ \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{C}^k,\ g\in G.$$

$\hookrightarrow$ Por lo tanto, la cantidad $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$ (para $\vec{x},\vec{y}$ fijos) es un invariante bajo la acción del grupo.

Dado que ninguna de las representaciones (ρ ó R) es unitaria, no podemos usar el producto hermítico usual en $\mathbb{C}^2$ para buscar invariantes. Sin embargo, sí podemos explotar la relación existente entre las 2 representaciones ($\hat{A} = \varepsilon^{-1}A^*\varepsilon$) para construir invariantes.

Recordemos que si $A = e^{i\theta\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}e^{\lambda\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{u}}$, entonces $\hat{A} = e^{i\theta\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}e^{-\lambda\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{u}}$

Si $\xi = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ entenderemos, como es usual, que $\xi^\dagger$ es un vector ~~fila~~ fila: $\xi^\dagger = (\xi_1^*, \xi_2^*)$. Así, tenemos que $\xi^\dagger\xi\in\mathbb{C}$.

Como ambos espinores se representan en un espacio $\cong\mathbb{C}^2$, podemos fijar el espacio de representación ($\mathbb{C}^2$) y trabajar con ambas rep<u>ns</u> (A y $\hat{A}$) sobre el mismo espacio.

En ese caso, para $\phi_R, \phi_L \in \mathbb{C}^2$, tenemos:

$A \in SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow$ ϕ_R transforma como $\phi_R' = A\phi_R$

ϕ_L transforma como $\phi_L' = \hat{A}\,\phi_L$

Entonces, $\phi_R'^{\dagger}\phi_L' = (A\phi_R)^{\dagger}(\hat{A}\,\phi_L) =$

$$= \phi_R^{\dagger} A^{\dagger}\hat{A}\,\phi_L = \phi_R^{\dagger}\left(e^{i\theta\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}e^{\lambda\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{v}}\right)^{\dagger}\left(e^{i\theta\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}e^{-\lambda\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{v}}\right)\phi_L$$

$$= \phi_R^{\dagger}\phi_L \rightarrow \text{invariante !}$$

Algo similar sucede con la combinación $\phi_L^{\dagger}\phi_R \rightarrow$ también invariante

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\psi = \begin{pmatrix}\phi_R\\ \phi_L\end{pmatrix}$, podemos intentar buscar una combinación de estos 2 invariantes que se pueda expresar en términos de ψ. Esto es fácil:

$$\phi_R^{\dagger}\phi_L + \phi_L^{\dagger}\phi_R = (\phi_R^{\dagger}, \phi_L^{\dagger})\begin{pmatrix}\phi_L\\ \phi_R\end{pmatrix} = (\phi_R^{\dagger}, \phi_L^{\dagger})\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbb{O}_2 & \mathbb{1}_2\\ \mathbb{1}_2 & \mathbb{O}_2\end{pmatrix}}_{\gamma^0 \text{ (en la repn de altas energías!)}}\begin{pmatrix}\phi_R\\ \phi_L\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi_R^{\dagger}\phi_L + \phi_L^{\dagger}\phi_R = \psi^{\dagger}\gamma^0\psi$$

Esto motiva la siguiente definición: $\boxed{\bar{\psi} := \psi^{\dagger}\gamma^0}$

$\rightarrow$ El resultado importante de este análisis es que la combinación

$$\bar{\psi}\psi$$

es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Es natural, por lo tanto, buscar construir un Lagrangiano para la ecuación de Dirac, partiendo de este invariante (cuadrático en ψ...)

• Lagrangiano para el campo de Dirac.

Para el campo escalar hemos visto que el término de masa es de la forma $\sim m^2\varphi^*\varphi$.

En el caso del campo de Dirac, podemos intentar algo de la forma $\sim m\bar{\Psi}\Psi$. Escribimos m (y no m^2) puesto que la ec. de Dirac es de primer orden ("$\sqrt{p^2+m^2}$")

Vamos a comprobar que el siguiente Lagrangiano en efecto da lugar a la ecuación de Dirac:

$$\mathcal{L}_D(x) = \frac{i}{2}\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) - \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) - m\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \qquad (*)$$

Observaciones:

- Una notación compacta para expresiones como la que aparece en $\mathcal{L}_D$ es la siguiente:

$$f\overleftrightarrow{\partial}g := f(\partial g) - (\partial f)g.$$

Con esta notación, el Lagrangiano se puede reescribir como

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}\left(\frac{i}{2}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu - m\right)\Psi.$$

- Así como hemos mostrado que $\bar{\Psi}\Psi$ es invariante, se puede mostrar que $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ transforma como un 4-vector y que $\bar{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi$ es invariante.

Las ecs. de Euler-Lagrange, aplicadas a $\mathcal{L}_D$, nos dan:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\Psi}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\Psi}} = \frac{i}{2}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = -\frac{i}{2}\gamma^\mu \Psi \quad \Longrightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0.$$

→ Si realizamos la variación con respecto a Ψ (y no a $\bar{\Psi}$), obtenemos la ec. de Dirac "conjugada":

$$\left(i\, \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m\bar{\Psi}\right) = 0.$$

• Teniendo un Lagrangiano para Ψ, podemos pasar a considerar el momento canónico conjugado, así como las relaciones de conmutación que deberá satisfacer el campo al ser cuantizado.

→ Momento canónico: $\Pi(x) := \dfrac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial(\partial_0 \Psi)} = \dfrac{i}{2}\bar{\Psi}(x)\gamma^0 = \dfrac{i}{2}\Psi^\dagger(x)\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=\mathbb{1}}$

$$\boxed{\Pi(x) = \frac{i}{2}\Psi^\dagger(x).}$$

Postulado de cuantización canónica:

Como veremos más adelante, la cuantización del campo de Dirac por medio de conmutadores lleva a problemas con la (micro-) causalidad de la teoría.

→ Postulamos:

$$\boxed{\left\{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta^\dagger(y)\right\}\Big|_{x^0=y^0} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}).}$$