El principio gauge. Ejemplo: Electrodinámica escalar.

El principio gauge, que presentaremos a continuación, es un principio físico de gran generalidad que, además de dar nuevas luces acerca de la electrodinámica nos permite formular una serie de teorías, de las cuales el electromagnetismo será el "caso más simple". Dichas teorías, conocidas como "teorías gauge", nos permitirán eventualmente desarrollar un modelo capaz de incorporar la fenomenología de las interacciones electromagnética, débil y fuerte $\longrightarrow$ El modelo estándar de partículas elementales.

Para introducir el principio, haremos uso de un modelo (al que llamaremos "electrodinámica escalar") que tiene la virtud de permitirnos hacer referencia directa a los 2 ejemplos de campos clásicos que hemos estudiado hasta el momento: el campo escalar y el campo electromagnético.

Comencemos recordando el Lagrangiano del campo escalar complejo, al que llamaremos $\mathcal{L}_\varphi$:

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi^* - m^2\varphi\varphi^*\right). \qquad (1)$$

Como sabemos, este Lagrangiano da lugar a la ecuación de Klein-Gordon, $\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\varphi = 0$.

Recordemos algunos aspectos relevantes del campo descrito por $\mathcal{L}_\varphi$:

i) Como consecuencia de la simetría de $\mathcal{L}_\varphi$ bajo transformaciones de traslación espacio-temporales, obtenemos conservación de energía y momento lineal. En particular, la densidad de energía del campo está dada por

$$\mathcal{H}(x) = \dot{\varphi}(x)\dot{\varphi}(x)^* + \vec{\nabla}\varphi^*(x)\cdot\vec{\nabla}\varphi(x) + m^2\varphi^*(x)\varphi(x). \quad (2)$$

Esta densidad, al ser integrada sobre todo el espacio, da lugar a la energía del campo,

$$H = \int \mathcal{H}(x)\, d^3\vec{x} = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\, E_p\left(a^*(p)\,a(p) + b^*(p)\,b(p)\right). \quad (3)$$

En esta expresión, $a(p)$ y $b(p)$ son los coeficientes de Fourier de $\varphi(x)$ que, como sabemos, pasarán a ser operadores de aniquilación de partículas "tipo a" o "tipo b" tras cuantizar la teoría.

ii) Otra simetría presente en esta teoría es una simetría "interna" de tipo $U(1)$, que corresponde a transformaciones de fase de la forma

$$\varphi \longmapsto \varphi' = e^{i\theta}\varphi. \quad (4)$$

- Llamamos a este tipo de simetría una "simetría interna" porque no es una transformación de espacio-tiempo (como sí lo son, por ejemplo, las traslaciones o las rotaciones).

- Decimos, además, que se trata de una transformación de tipo $U(1)$ porque en efecto, si denotamos con $\mathcal{M}$ el espacio de todas las funciones φ sobre las que extremizamos la acción, entonces (4) se puede expresar en términos de una acción

de grupo:
$$\begin{aligned} U(1)\times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ e^{i\theta}\ ,\ \varphi &\longmapsto e^{i\theta}\varphi \end{aligned}$$

La cantidad conservada que se desprende de esta simetría (vía el teorema de Noether) es la integral sobre el espacio de la componente cero del 4-vector (único salvo una constante multiplicativa),

$$j^{\mu} = -i\left(\varphi\, \partial_{\mu}\varphi^{*} - \varphi^{*}\partial_{\mu}\varphi\right), \qquad (5)$$

es decir,

$$Q := \int d^3\vec{x}\; j^{0}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\left(a^{*}(p)\,a(p) - b^{*}(p)\,b(p)\right). \qquad (6)$$

En la versión cuantizada de la teoría, Q se convierte –como ya hemos mencionado– en el operador de carga eléctrica.

Observaciones

- Teniendo en cuenta (5) y (6), así como el hecho de que $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$, vemos que si llegásemos a pensar en la posibilidad de describir materia en términos de un campo escalar complejo φ, entonces dicho campo (en su versión cuantizada) podría describir partículas masivas, que vienen en dos tipos de carga (que por lo tanto podríamos llamar "carga eléctrica").
- Por la observación anterior, y por lo que sabemos de electrodinámica clásica, si quisiéramos proponer una forma de acoplar este tipo de "materia" a la radiación (i.e. al campo EM), lo natural sería agregar al Lagrangiano un término de la forma

$$\mathcal{L}_{I} \sim j^{\mu} A_{\mu}. \qquad (7)$$

El principio gauge nos permitirá obtener el término de acople (o de "interacción") (7) de forma muy natural. Pasemos entonces a discutir dicho principio.

Comencemos por observar que la razón por la cual el Lagrangiano $\mathcal{L}_\varphi$ en la ec. (1) es invariante bajo las transformaciones (4) es simplemente porque cada vez que aparece φ en $\mathcal{L}_\varphi$, también aparece φ^*, de tal forma que las fases se cancelan. Así, por ejemplo, para el termino de masa tenemos:

$$m^2 \varphi'^*(x)\varphi'(x) = m^2 (e^{i\theta}\varphi)^*(e^{i\theta}\varphi) = m^2 e^{-i\theta} e^{i\theta} \varphi^*(x)\varphi(x)$$
$$= m^2 \varphi^*(x)\varphi(x).$$

Lo mismo sucede con el término cinético, ya que al θ ser una constante, tenemos $\partial_\mu \varphi'(x) = \partial_\mu (e^{i\theta}\varphi(x)) = e^{i\theta}\partial_\mu \varphi(x)$, de manera que (nuevamente) tenemos una cancelación de fases.

¿Qué sucede si en lugar de una transformación <u>global</u> como la descrita por (4) consideramos una transformación <u>local</u>?

Con esto nos referimos a transformaciones de la forma

$$\varphi(x) \longmapsto \varphi'(x) = e^{-ie\Lambda(x)}\varphi(x), \qquad (8)$$

donde "e" es una constante y $x \longmapsto \Lambda(x)$ una función suave, pero por demás arbitraria de x?

Está claro que debido a la presencia de operadores de derivación (∂_μ) en $\mathcal{L}_\varphi$, este último <u>no</u> puede ser invariante.

Veamos cuál es el efecto de la transformación (8) sobre el Lagrangiano:

Con $\varphi'(x) = e^{-ie\Lambda(x)}\varphi(x)$, tenemos:

$$\mathcal{L}_\varphi' = \frac{1}{2}\partial^\mu(e^{-ie\Lambda}\varphi)\,\partial_\mu(e^{ie\Lambda}\varphi^*) - \frac{1}{2}m^2(e^{-ie\Lambda}\varphi)(e^{ie\Lambda}\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-ie(\partial^\mu\Lambda)e^{-ie\Lambda}\varphi + e^{-ie\Lambda}\partial^\mu\varphi\right)\left(ie(\partial_\mu\Lambda)e^{ie\Lambda}\varphi^* + e^{ie\Lambda}\partial_\mu\varphi^*\right) - \frac{1}{2}m^2|\varphi|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(-ie[\partial^\mu\Lambda]\varphi + \partial^\mu\varphi\right)\left(ie[\partial_\mu\Lambda]\varphi^* + \partial_\mu\varphi^*\right) - \frac{1}{2}m\varphi\varphi^*$$

$$= \frac{1}{2}e^2(\partial_\mu\Lambda)(\partial^\mu\Lambda)\varphi\varphi^* + \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi^* - \frac{1}{2}m\varphi\varphi^*$$

$$+ \left(\frac{ie}{2}\right)\left(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*\right)(\partial^\mu\Lambda). \qquad (9)$$

Obtenemos, por lo tanto, $\varphi \mapsto \varphi' = e^{-ie\Lambda}\varphi \rightsquigarrow \mathcal{L}_\varphi \mapsto \mathcal{L}_\varphi'$, con

$$\mathcal{L}_\varphi' = \mathcal{L}_\varphi + \frac{e^2}{2}(\partial^\mu\Lambda\partial_\mu\Lambda)\varphi\varphi^* + j_\mu\partial^\mu\Lambda, \qquad (10)$$

donde

$$j_\mu := \frac{ie}{2}\left(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*\right) \qquad (11)$$

es justamente la corriente conservada asociada a transformaciones $U(1)$ globales (como en (4)).

Observemos que uno de los términos que aparecen, $j_\mu\partial^\mu\Lambda$, es similar al que conocemos de la electrodinámica clásica para el acople "radiación-materia" (cf. (7)), es decir, un término de la forma $j_\mu A^\mu$, donde A^μ es el vector potencial, en términos del cual podemos expresar el campo EM: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Por lo tanto, es de esperar que sea posible "compensar" el efecto de una transformación gauge local como (8) introduciendo términos de la forma

$$j_\mu A^\mu \longrightarrow \text{para compensar } j_\mu \Lambda^\mu, \qquad (12)$$

así como

$$A^\mu A_\mu \varphi\varphi^* \longrightarrow \text{para compensar } (\partial_\mu \Lambda)(\partial^\mu \Lambda)\varphi\varphi^*. \qquad (13)$$

Para poder generar esta "compensación" será necesario considerar, al mismo tiempo que $\varphi \mapsto e^{-ie\Lambda}\varphi$, una transformación gauge del campo electromagnético que, como sabemos, es de la forma $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$.

Por lo tanto, vamos a añadir al Lagrangiano inicial $\mathcal{L}_\varphi$ el siguiente "Lagrangiano de interacción":

$$\mathcal{L}_I = \alpha (A^\mu A_\mu)\varphi\varphi^* + \beta\, j_\mu A^\mu, \qquad (14)$$

donde α y β son constantes a determinar.

Ejercicio.

a) Mostrar que la exigencia de invarianza del Lagrangiano $\mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_I$ bajo una transformación simúltanea de la forma

$$\left.\begin{aligned} \varphi &\longmapsto e^{-ie\Lambda}\varphi \\ A_\mu &\longmapsto A_\mu + \partial_\mu \chi \end{aligned}\right. \qquad (15)$$

nos lleva de forma unívoca a la escogencia $\alpha = \frac{e^2}{2}$, $\beta = -1$, $\chi(x) = \Lambda(x)$.

b) Mostrar que, para esa escogencia, tenemos

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_I \overset{!}{=} \frac{1}{2} D^\mu\varphi (D_\mu \varphi)^* - \frac{1}{2} m^2 \varphi\varphi^*, \qquad (16)$$

donde $D^\mu \varphi := (\partial^\mu + ieA^\mu)\varphi$ (derivada covariante).