Cuantización del campo electromagnético.

Previamente hemos visto que la prescripción de "cuantización canónica" no se puede aplicar directamente al caso del campo electromagnético, ya que el momento conjugado de A_0 se anula: $\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_0)} = -F^{00} = 0$.

→ Intentaremos ahora entender (al menos parcialmente) cuál es el origen del problema.

Notemos que de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ se sigue que, en el vacío, se debe cumplir

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 . \qquad (1)$$

Esta ecuación se puede reescribir de tal forma que se evidencie su similitud con la ecuación de Klein-Gordon:

$$\rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0 .$$

Podemos escoger un gauge en el que se cumpla $\partial_\mu A^\mu = 0$ (condición de Lorenz), quedando así en evidencia el hecho de que <u>cada una de las componentes A_ν satisface la ec. de Klein-Gordon, para $m=0$.</u>

Notemos ahora que la función de Green $G(x)$ que corresponde al operador de Klein-Gordon, es invertible. De hecho, por definición tenemos

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\, G(x) = -i\,\delta(x), \qquad (2)$$

de tal forma que, al tomar la transformada de Fourier, obtenemos:

$$\tilde{G}(p) \propto \frac{1}{p^2 - m^2} . \qquad (3)$$

En el caso del campo electromagnético, tenemos (ec. (1)):

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \partial_\nu(\partial_\mu A^\mu) = \partial_\sigma \partial^\sigma g_{\mu\nu} A^\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\mu = 0$$

$$\longrightarrow \quad \left(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu\right) A^\mu = 0, \qquad (4)$$

con $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$.

• <u>Afirmación:</u> el operador $g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu$ no es invertible.

• Consideremos, de forma general, dos operadores de proyección P y Q, que sean "ortogonales" y tales que $P + Q = \mathbb{1}$.

→ Proyecciones: $P^2 = P$, $Q^2 = Q$.

→ Ortog.: $QP = PQ = 0$.

Entonces,

(i) Ni P ni Q son invertibles.

(ii) Si λ es una constante, $\lambda \neq 0$, entonces $P + \lambda Q$ <u>es</u> invertible.

Veamos: (i) → Si $P^2 = P$, entonces P no puede tener inverso.

Asumir que sí: $\exists$ G t.q. $PG = \mathbb{1}$. Pero entonces

$$\mathbb{1} = PG = P^2 G = P(PG) = P\mathbb{1} = P.$$

(ii) Por otro lado, vemos que para $\lambda \neq 0$ se tiene

$$(P + \lambda Q)^{-1} = P + \frac{1}{\lambda} Q.$$

De hecho, tenemos

$$\left(P + \frac{1}{\lambda} Q\right)\left(P + \lambda Q\right) = P^2 + \lambda PQ + \frac{1}{\lambda} QP + Q^2 = P + Q = \mathbb{1}.$$

Consideremos ahora las proyecciones longitudinales y transversales de un 4-vector A sobre el 4-vector k.

Tenemos:

$$\mathrm{Proy}_k^{long} A : \quad A_\nu^l := (A^\mu k_\mu) \frac{k_\nu}{k^2}$$

$$\mathrm{Proy}_k^{tr} A : \quad A_\nu^t := A_\nu - A_\nu^l = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) A^\mu \qquad (5)$$

Tenemos operadores de proyección

$$P_{\mu\nu}^{long}(k) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad , \quad P_{\mu\nu}^{tr}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} . \qquad (6)$$

Podemos representar el operador $g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu$ en el espacio de Fourier, obteniendo $g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu = k^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$. Esto demuestra la afirmación anterior: "$g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu$ no es invertible".

• Relación con transformaciones gauge:

En el espacio de Fourier, una transformación gauge $A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$ toma la forma

$$\tilde{A}_\nu(k) \longmapsto \tilde{A}'_\nu(k) = \tilde{A}_\nu(k) - i k_\nu \tilde{\chi}(k). \qquad (7)$$

Definiendo $\xi(x) := \partial_\mu A^\mu(x)$, tenemos, en el espacio de Fourier,

$$\tilde{A}_\nu = \tilde{A}_\nu^{long} + \tilde{A}_\nu^{tr} \quad ; \qquad k^\nu \tilde{A}_\nu^{tr} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k^\nu \tilde{A}_\nu^l = \frac{k^\nu k_\nu k_\mu \tilde{A}^\mu}{k^2} = k_\mu \tilde{A}^\mu \equiv -i \tilde{\xi}(k) \qquad (8)$$

Aquí, la función $\tilde{\xi}(k)$ es la transformada de Fourier de $\xi(x)$, de tal forma que tenemos $\tilde{\xi}(k) = \widetilde{(\partial_\mu A^\mu)}(k) = i k_\mu \tilde{A}^\mu(k)$.
Lo mismo aplica para la relación entre $\chi(x)$ y $\tilde{\chi}(k)$: $\widetilde{\partial_\mu \chi}(k) = i k_\mu \tilde{\chi}(k)$.

¿Cómo se comportan las componentes long. y transv. de A bajo transformaciones gauge?

• Componente transversal:

$$\tilde{A}_\nu^{\prime\, tr}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\tilde{A}^{\mu\prime}(k) = \tilde{A}_\nu^{tr}(k) - i\,\underbrace{\cancel{\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)k^\mu}}_{k_\nu - k_\nu = 0}\,\tilde{\chi}(k)$$

$$\rightarrow \quad \tilde{A}_\nu^{\prime\, tr} = \tilde{A}_\nu^{tr} \quad \text{(no cambia).}$$

• Componente longitudinal:

$$\tilde{A}_\nu^{\prime\, long} = \left(\tilde{A}^{\prime\mu} k_\mu\right)\frac{k_\nu}{k^2} = \tilde{A}_\nu^{long} - i\,k^\mu\,\tilde{\chi}(k)\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

$$= \tilde{A}_\nu^{long} - i\,\tilde{\chi}(k)\,k_\nu$$

$$\Longrightarrow \qquad \tilde{\xi}' \overset{(8)}{=} i\,k^\nu \tilde{A}_\nu^{\prime\, long} = \tilde{\xi} - i\,k^2\,\tilde{\chi}(k). \qquad (9)$$

Vemos entonces que los grados de libertad "en exceso" debidos a la simetría gauge están contenidos en el "campo" $\xi = \partial_\mu A^\mu$ que, por tanto, no es físico.

Como se hará claro a continuación, el hecho de que estemos describiendo grados de libertad "extra" está relacionado con el problema, que habíamos ya mencionado $\longrightarrow$ $\Pi^0 = F^{00} = 0$, es decir, que no hay un momento canónico asociado a A_0.

Una forma de abordar el problema es considerando el "espacio" de todos los potenciales gauge, $\mathcal{A}$. Este no es un espacio vectorial, pero sí posee una estructura afín, convexa.

Consideremos además el "grupo gauge" definido como

$\mathcal{G} = \{ g : M \to U(1) \mid g(x) \to 1,\ x \to \infty \}$, donde M = espacio de Minkowski

La acción de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{A}$ está dada por

$$\begin{aligned} &\mathcal{G} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \\ &g\ , A_\mu \mapsto g \cdot A_\mu = g A_\mu g^{-1} - (\partial_\mu g) g^{-1}, \qquad (10) \end{aligned}$$

que, para $g = e^{i\chi(x)}$, se reduce a $g \cdot A_\mu = A_\mu - i\partial_\mu \chi$

De esta forma, podemos considerar al espacio cociente $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ como el espacio de configuración de la teoría. Esta es una de las formas de abordar el problema.

Otra forma de entender el problema, en lugar de considerar clases de equivalencia, consiste en considerar una condición local, de la siguiente forma: $\Phi(A_\mu) = 0$.

Una condición de este tipo define una especie de "superficie" de ligadura, o restricción, sobre los campos A_μ. Estas ecs. no deben ser consideradas, por lo tanto, como ecuaciones dinámicas.

Podemos entender esto en términos de las ecuaciones de Maxwell:

• Ecs. homogéneas: $\varepsilon_{\rho\tau\mu\nu}\partial^\tau F^{\mu\nu}=0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}$ (Faraday)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

• Ecs. inhomogéneas (en el vacío):

$\partial_\mu F^{\mu\nu}=0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{B}$ (Ampére-Maxwell)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ (Coulomb)

Ahora bien, escribiendo los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en términos de A_μ:
$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, podemos reescribir las 2 ecs. que involucran derivadas en t como

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E} - \vec{\nabla}A^0$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$$

$\longleftarrow$ Notemos que en estas ecuaciones solo aparecen las variables canónicas y sus momentos conjugados.

$\rightarrow$ Pero no hay una ecuación para $\frac{\partial A^0}{\partial t}$!

La única ec. de Maxwell que no hemos usado es la ley de Coulomb. Pero ésta no involucra ninguna derivada resp. a t, así que la interpretamos como una restricción:

$$\Gamma := \vec{\nabla}\cdot\vec{E} \overset{!}{=} 0$$

$\{\,,\,\}$: corchete de Poisson

Se puede mostrar que $\{\Gamma, H\}=0$, así que la evolución del sistema tiene lugar dentro de la "superficie" restringida definida por $\Gamma\equiv 0$. Dirac desarrolló una teoría que permite cuantizar satisfactoriamente sistemas que, como este, presentan ligaduras de forma intrínseca. Nosotros optaremos por una tercera opción, que consistirá en fijar un gauge, por medio de la introducción de un nuevo término en el Lagrangiano.

La solución que consideraremos aquí consiste en lo siguiente:

- El operador $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$, y por lo tanto $g_{\mu\nu}\Box$, posee un inverso.
- Si escogemos el gauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, entonces desaparece el segundo término al lado izquierdo de

$$\left(g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial^\nu \right) A^\mu = 0, \qquad (11)$$

solucionando así el problema de "no invertibilidad".

$\longrightarrow$ Fijar el gauge, de tal forma que se preserve la invarianza de Lorentz

$$\searrow \mathcal{L}_{EM} \longmapsto \mathcal{L} := \mathcal{L}_{EM} + \underbrace{\mathcal{L}_{g.f.}}_{} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} \left(\partial_\mu A^\mu \right)^2 \qquad (12)$$

"gauge fixing term"

Veamos cuál es el efecto de haber añadido el término "$\mathcal{L}_{g.f.}$" al Lagrangiano.

En primer lugar, veamos qué efecto tiene la adición de este término sobre el problema original ($\pi_0 = 0$):

Ahora tenemos:

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_0)} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\dot{A}_0)}}_{= -F^{00} = 0} - \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{A}_0} \left(\partial_\mu A^\mu \right)^2$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \left(\partial_\mu A^\mu \right) \qquad (13)$$

Claramente, las restantes 3 componentes, π^1, π^2 y π^3, siguen siendo las mismas que habíamos obtenido previamente:

$$\pi^i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \qquad (14)$$

Las relaciones (13), (14) nos permiten volver sobre el problema de cuantización y, ahora sí, proponer relaciones de conmutación a tiempos iguales, de la forma

$$\left[\hat{A}_\mu(x), \hat{\pi}^\nu(y)\right]_{x_0=y_0} = i\,\delta_\mu^\nu\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad (15)$$

Observaciones:

- Las relaciones de conmutación (15) son completamente análogas a las que ya hemos discutido previamente para el campo escalar. Por ejemplo, en el caso del campo escalar real, partimos del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right). \qquad (16)$$

Esto nos lleva a la ecuación de movimiento

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\,\varphi(x) = 0, \qquad (17)$$

de tal forma que el momento canónico asociado a $\varphi(x)$ está dado por

$$\pi(x) := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}(x) = \dot{\varphi}(x). \qquad (18)$$

Por otro lado, para el Lagrangiano $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2$, que incluye el "gauge fixing term", obtenemos la siguiente ecuación de movimiento:

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu(x) - \left(1 - 1/\alpha\right)\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0 \qquad (19)$$

Notemos que si en (19) imponemos la condición de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, entonces tendremos $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$. Es decir, si de alguna forma logramos "forzar" la condición de Lorentz (o si escogemos $\alpha = 1$), entonces tenemos que cada una de las componentes del campo A deberá satisfacer la ec. de Klein-Gordon (para $m=0$):

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) = 0, \quad \nu = 0,1,2,3. \qquad (20)$$

Como el campo A tiene 4 componentes, tenemos ahora 4 momentos canónicos asociados, dados por las ecs. (13) y (14):

$$\pi^\mu(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}(x) \longrightarrow \pi^0 = -\frac{1}{\alpha}(\partial_\nu A^\nu),$$

$$\pi^i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \quad (i=1,2,3)$$

Comparando los 2 casos, tenemos entonces:

	Campo escalar φ	Campo electromagnético A
Componentes:	Uno $\to \varphi$	Cuatro $\to A_0, A_1, A_2, A_3$
Momento(s) conjugados:	$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$	$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}$
Relaciones de conmutación (a tiempos iguales):	$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)]_{x^0=y^0} = i\delta(\vec{x}-\vec{y})$	$[\hat{A}_\mu(x), \hat{\pi}^\nu(y)]_{x^0=y^0} = i\delta_\mu^\nu \delta(\vec{x}-\vec{y})$
	(los demás conmutadores iguales a cero $\to$ "$[\hat{\varphi},\hat{\varphi}] = 0 = [\hat{\pi},\hat{\pi}]$")	(los demás iguales a cero $\to$ "$[\hat{A},\hat{A}] = 0 = [\hat{\pi},\hat{\pi}]$")

- En la relación de conmutación $[\hat{A}_\mu(x), \hat{\pi}^\nu(y)]_{x^0=y^0} = i\delta_\mu^\nu \delta(\vec{x}-\vec{y})$, la inclusión del término δ_μ^ν al lado derecho tiene lugar en analogía a las relaciones $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$, familiares de mecánica cuántica. Nótese, sin embargo, la posición de los índices: $\delta_\mu^{\;\nu}$ (y no $\delta_{\mu\nu}$ o $\delta^{\mu\nu}$). Esto debe ser así para respetar la estructura covariante de toda la expresión (los índices que van abajo/arriba al lado izquierdo deben también ir abajo/arriba al lado derecho). Además, de la definición del momento canónico como $\pi^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\nu}$ se sigue que el índice de π^ν va arriba (y no abajo) $\rightsquigarrow$ $A_\mu \longleftrightarrow \pi^\mu$.

La segunda observación tiene la siguiente consecuencia importante: Recordando que los índices se pueden subir/bajar haciendo uso de la métrica tenemos, por ejemplo, que $g_{\mu\nu} = g_{\sigma\nu}\,\delta_\mu^{\;\sigma}$ (recordar que $g^{\mu\nu}$ es la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$, y que -por definición- $\delta_\sigma^{\;\mu} := g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma}$, de tal forma que $g_{\sigma\nu}\delta_\mu^{\;\sigma} = g_{\sigma\nu}\, g^{\sigma\tau} g_{\tau\mu} = g_{\sigma\nu}\, g^{\sigma}{}_{\mu} = g_{\mu\nu}$). De esta forma, si multiplicamos la relación

$$\left[\hat{A}_\mu(x), \hat{\pi}^\sigma(y)\right]_{x_0=y_0} = i\,\delta_\mu^{\;\sigma}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

por $g_{\sigma\nu}$, obtenemos

$$\left[\hat{A}_\mu(x), \hat{\pi}_\nu(y)\right]_{x_0=y_0} = i\,g_{\mu\nu}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}). \qquad (21)$$

Dejaremos como ejercicio mostrar que, en el "gauge" $\alpha = 1$, las relaciones de conmutación a tiempos iguales toman la siguiente forma:

$$\left[\dot{A}_\mu(x), A_\nu(y)\right]_{x^0=y^0} = i\,g_{\mu\nu}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad (22)$$

→ Las ecuaciones (20) y (22) nos dicen que (para $\alpha = 1$), cada una de las componentes A_μ se comporta como un campo escalar:

- Por un lado, (20) nos dice que $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0$ para $\mu = 0,1,2,3$

- Por otro lado, la implementación del postulado de cuantización canónica a tiempos iguales (cf. ecs. (15)/(22)) en el gauge $\alpha = 1$, nos dice que cada A^μ satisface las relaciones de conmutación de un campo escalar $\left([\hat{\varphi}(x), \dot{\hat{\varphi}}(y)]_{x^0=y^0} = i\delta(\vec{x}-\vec{y}) \right)$.
  En un sentido estricto, sin embargo, esto solo es cierto para las componentes espaciales! En efecto, la presencia de la métrica $g_{\mu\nu}$ en (22), hace que para A^0 las relaciones de conmutación tengan el signo equivocado:

$$\left[\hat{A}^0(x), \dot{\hat{A}}^0(y) \right]_{x^0=y^0} = -i\delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad (23)$$

¿Qué implicaciones físicas tiene esto?

→ Recordemos que el "campo" $\xi(x) = \partial_\mu A^\mu(x)$ no puede ser físico, ya que es sobre este que se ve reflejada cualquier transf. gauge. Para lograr una reducción a los grados de libertad físicos, nos hace falta aún imponer la condición de Lorenz (que es justo $\partial_\mu A^\mu = 0$). Sin embargo, se puede mostrar que dicha condición <u>no</u> se puede imponer sobre los operadores:

La identidad $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$ <u>no</u> es compatible con las relaciones de conmutación. De hecho, a partir de (15)/(22) podemos obtener la forma general de las relaciones de conmutación,

$$[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(y)] = -i g_{\mu\nu} \Delta_0(x-y; m=0) \qquad (24)$$

Si asumimos que $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$, entonces de (24) obtenemos

$$0 = [\partial_\mu \hat{A}(x), \hat{A}_\nu(y)] = -i g_{\mu\nu} \partial_\mu \Delta_0(x-y; m=0) \neq 0$$

$\rightarrow$ contradicción!

Más abajo veremos que la solución a este problema está en imponer una versión más débil de la condición de Lorenz, a saber, que $\langle \Psi | \partial_\mu \hat{A}^\mu | \Psi \rangle = 0$ para los estados <u>físicamente realizables</u>.

¿Qué quiere decir esto? Notemos que la presencia de $g_{\mu\nu}$ en el lado derecho de (24) implica que $\hat{A}^0$ satisface las CCR $[\hat{A}_0(x), \hat{A}_0(y)] = -i \Delta_0(x-y; m=0)$.

Comparando nuevamente con el caso del campo escalar φ, vemos que el signo (−) que acompaña a Δ_0 es incorrecto (para φ, así como para A_1, A_2 y A_3, es (+)). Lo anterior nos permite escribir estados de un fotón (correspondientes a $\hat{A}_0$) cuya norma resulta ser negativa! (veremos un ejemplo más adelante).

Para poder completar la discusión sobre la cuantización del campo EM, y para poder llegar a un resultado concreto al respecto que nos permita avanzar con nuestro programa, debemos antes realizar un análisis de los modos de Fourier del campo A_μ.

Expansión de Fourier del campo electromagnético

Consideremos el campo (por ahora clásico) A_μ, en el gauge de Lorenz, de tal forma que cada componente $A_\mu(x)$ sea solución de la ec. de Klein-Gordon (para $m=0$) : $\partial_\nu \partial^\nu A_\mu(x) = 0$ $(0 \leq \mu \leq 3)$.
El operador de onda $\partial_\nu \partial^\nu$ tiene soluciones en ondas planas de la forma $e^{-ik\cdot x}$, donde $k^2 \equiv k_\mu k^\mu = 0$ (recordar que $m=0$).
De esta forma, podemos proponer soluciones para $\partial_\nu \partial^\nu A_\mu = 0$ en ondas planas, así:

$$A_\mu(x) = C_\mu e^{-ik\cdot x}, \qquad k_\mu k^\mu = 0. \qquad (25)$$

Observemos que la dependencia de x va en la onda $e^{-ik\cdot x}$, mientras que el coeficiente C_μ ha de ser visto como la componente "μ" de un 4-vector. Hasta este punto <u>podríamos</u> afirmar que la ec. (25) describe 4 campos (A_0, A_1, A_2, A_3) que son independientes (por supuesto A_μ debe satisfacer las ecs. de Maxwell en el vacío, pero esto es justo lo que garantiza (25)). Sin embargo, al imponer una condición "gauge", la situación cambia, de tal forma que los coeficientes C_μ ya no serán independientes entre sí. Según nuestra discusión previa, esto tiene sentido, ya que al imponer un gauge ayudamos a eliminar los grados de libertad redundantes. Veamos como se lleva a cabo esta reducción al imponer el gauge de Lorenz.

Para una solución de las ecs. de Maxwell de la forma (25), i.e. $A_\mu(x) = C_\mu e^{ik\cdot x}$ (con $k_\mu k^\mu = 0$), la imposición de $\partial^\mu A_\mu = 0$ nos lleva a:

$$0 \overset{!}{=} \partial^\mu A_\mu = \partial^\mu \left(C_\mu e^{-ik\cdot x} \right) = -i\, k^\mu C_\mu e^{-ik\cdot x}$$

$$\Rightarrow \qquad k^\mu C_\mu = 0 . \qquad (26)$$

En el caso del campo escalar real, las soluciones en ondas planas eran de la forma $\varphi(x) = a_p e^{-ip\cdot x}$, con $p_\mu p^\mu = m^2$.

Aquí tenemos $A_\mu(x) = C_\mu e^{-ik\cdot x}$, de tal forma que C_μ es el coeficiente de Fourier que corresponde a la onda $e^{-ik\cdot x}$. Como tal, debe ser una función de k : $C_\mu = C_\mu(k)$.

Ahora, lo que nos dice (26) es que la dependencia de k debe ser tal que se cumpla $k^\mu C_\mu(k) = 0$.

¿Qué significado tiene esta condición? Para responder esta pregunta es conveniente introducir una base de vectores que dependa de k.

El 4-vector $C(k) = (C^0(k), C^1(k), C^2(k), C^3(k)) \in \mathbb{C}^4$ (los coef. de Fourier son números complejos).

Introduzcamos, por lo tanto, una base para este $\mathbb{C}^4$, así:

$$\{ \varepsilon^{(0)}(k), \varepsilon^{(1)}(k), \varepsilon^{(2)}(k), \varepsilon^{(3)}(k) \} \qquad (27).$$

Entonces, si la base es $\{\varepsilon^{(\lambda)}(k)\}_{\lambda=0,1,2,3}$, el 4-vector $C(k)$ se puede expandir en esta base. A los <u>coeficientes</u> de la expansión los llamaremos $c^{(\lambda)}(k)$, de tal forma que se tenga

$$C(k) = \sum_{\lambda=0}^{3} C^{(\lambda)}(k)\, \varepsilon^{(\lambda)}(k), \qquad (28)$$

vectores base

coeficientes de la expansión

o, escribiendo la misma expansión por componentes,

$$C_\mu(k) = \sum_{0\leq\lambda\leq 3} C^{(\lambda)}(k)\, \varepsilon^{(\lambda)}_\mu(k). \qquad (29)$$

Ya estamos en posición de interpretar la condición (26). En efecto, si descomponemos el campo en componentes longitudinales y transversales, por medio de los operadores de proyección definidos en (5), i.e. $P^{tr}_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$, $P^{long}_{\mu\nu}(k) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$, entonces tendremos

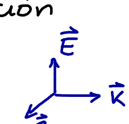
$$C_\nu = C^{tr}_\nu + C^{long}_\nu \equiv P^{tr}_{\nu\mu} C^\mu + P^{long}_{\nu\mu} C^\mu. \qquad (30)$$

Como ya hemos visto, una transformación gauge $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$ solo va a afectar la componente longitudinal. En el espacio de Fourier la transformación gauge toma la forma

$$C_\mu \longmapsto C_\mu + i k_\mu \tilde{\chi}(k). \qquad (31)$$

Como el término $i k_\mu \tilde{\chi}(k)$ es longitudinal, vemos que se tendrá

$$\begin{aligned} C^{tr}_\mu &\longmapsto C^{tr}_\mu, \\ C^{long}_\mu &\longmapsto C^{long}_\mu + i k_\mu \tilde{\chi}(k). \end{aligned} \qquad (32)$$

Lo que veremos a continuación es que si en (29) hacemos una escogencia adecuada, tanto de los vectores base $\varepsilon^{(\lambda)}(k)$ como de los coeficientes $C^{(\lambda)}(k)$, será posible eliminar los grados de libertad longitudinales, con lo cual la condición $k^\mu C_\mu = 0$ se convertirá en la condición de transversalidad familiar para la propagación de ondas E.M. ()

Entonces → la escogencia de la base $\{\varepsilon^{(\lambda)}\}_\lambda$, en conjunto con la escogencia de los coeficientes $c^{(\lambda)}(k)$, debe estar guiada por los siguientes requerimientos:

1) Debe ser (o, mejor dicho, conviene que sea) tal que facilite la interpretación física. Aquí será relevante recordar que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ (en ausencia de cargas/corrientes) siempre son transversales, queriendo decir con esto que son perpendiculares al vector $\vec{k}$, que determina la dirección de propagación de las ondas y es, además, la parte espacial del 4-vector $k = (k^0, \vec{k})$.

2) Debe ser tal que se cumpla $k^\mu c_\mu(k) = 0$.

3) Debe permitir implementar la reducción a los grados de libertad físicos. En particular, deben surgir relaciones entre los coeficientes $c^{(\lambda)}(k)$, que den lugar a dicha reducción.

Definición y propiedades de la base $\{\varepsilon^{(\lambda)}(k)\}_\lambda$

→ Como en la descomposición de Fourier k satisface $k_\mu k^\mu = 0$, tenemos $k = (\omega_k, \vec{k})$

↪ $\varepsilon^{(\lambda)}(k) = \varepsilon^{(\lambda)}(\vec{k})$

$\omega_k = \|\vec{k}\|$
(i.e. $E = \|\vec{p}\| c$)

- $\underline{\lambda = 1, 2:}$ $\quad \varepsilon_0^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0, \quad k^i \varepsilon_i^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0.$

Es decir,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)}(\vec{k}) &:= (0, \vec{\varepsilon}^{(1)}(\vec{k})) \\ \varepsilon^{(2)}(\vec{k}) &:= (0, \vec{\varepsilon}^{(2)}(\vec{k})) \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}^{(1)}(\vec{k}) &= 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}^{(2)}(\vec{k}) &= 0 \end{aligned} \right. \tag{33}$$

- $\underline{\lambda = 0:}$

$$\varepsilon^{(0)}(\vec{k}) := (1, 0, 0, 0) \tag{34}$$

- $\underline{\lambda = 3:}$

$$\varepsilon^{(3)}(\vec{k}) := \left(0, \frac{\vec{k}}{\omega_k}\right) \tag{35}$$

→ Propiedades de la base y consecuencias de su definición:

- El vector $\varepsilon^{(0)}(\vec{k})$ es "time-like", mientras que los vectores $\varepsilon^{(i)}(\vec{k})$ ($i=1,2,3$) son "space-like". La base es "ortogonal" en el sentido que satisface la siguiente relación:

$$\varepsilon^{(\lambda)}(\vec{k})\cdot\varepsilon^{(\lambda')}(\vec{k}) = g^{\lambda\lambda'}. \qquad (36)$$

Además satisface la siguiente identidad (aplica convención de suma):

$$\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})\, g_{\lambda\lambda'}\, \varepsilon_\nu^{(\lambda')}(\vec{k}) = g_{\mu\nu}. \qquad (37)$$

- Para $\lambda=1,2$, tenemos $k^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0$. Por otro lado, para $\lambda=0$ tenemos $k^\mu \varepsilon_\mu^{(0)}(\vec{k}) = k^0 \equiv \omega_k$, mientras que para $\lambda=3$ resulta $k^\mu \varepsilon_\mu^{(3)}(\vec{k}) = \dfrac{k^i k_i}{\omega_k} = -\dfrac{\|\vec{k}\|^2}{\omega_k} = -\omega_k$

- Sobre la condición de Lorenz, la anterior propiedad nos lleva a

$$k^\mu C_\mu(k) = k^\mu \sum_{\lambda=0}^{3} C^{(\lambda)}(k)\, \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$$

$$= C^{(0)}(k)\underbrace{k^\mu \varepsilon_\mu^{(0)}(k)}_{=\omega_k} + C^{(1)}(k)\underbrace{k^\mu \varepsilon_\mu^{(1)}(k)}_{=0} + C^{(2)}(k)\underbrace{k^\mu \varepsilon_\mu^{(2)}(k)}_{=0} + C^{(3)}(k)\underbrace{k^\mu \varepsilon_\mu^{(3)}(k)}_{=-\omega_k}$$

$$= \omega_k\left(C^{(0)}(k) - C^{(3)}(k)\right). \qquad (38)$$

↳ Si escogemos $C^{(0)}(k) = C^{(3)}(k)$, obtenemos la condición $k^\mu C_\mu = 0$.

- La escogencia $C^{(0)} = C^{(3)}$ está plenamente justificada desde un punto de vista físico, ya que esto corresponde justamente a eliminar los grados de libertad longitudinales que, como ya hemos visto, no son físicos:

→ Esto se puede comprobar con el siguiente cálculo sencillo:

$$C_\nu^{Long} = P^{Long}_{\nu\mu} C^\mu = P^{Long}_{\nu\mu}\Big(\sum_{0\leq\lambda\leq 3} C^{(\lambda)}(k)\, \varepsilon^{\mu(\lambda)}(k)\Big)$$

$$= \sum_\lambda C^{(\lambda)}(k) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \varepsilon^{\mu(\lambda)}(k) = \sum_\lambda C^{(\lambda)}(k) \frac{k_\nu}{k^2} k^\mu \varepsilon^{(\lambda)}_\mu(k)$$

$$= k_\nu \frac{\omega_k}{k^2}\left(C^{(0)}(k) - C^{(3)}(k)\right). \qquad (39)$$

Escribamos ahora el campo $A(x)$ en términos de sus modos de Fourier. Tenemos $(A = (A^0, \vec{A}))$

$$A(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k}\left(C(k)\, e^{-ik\cdot x} + C(k)^* e^{ik\cdot x}\right)\Big|_{k^0=\omega_k}$$

→ Tanto $A(x)$ como $C(k)$ son 4-vectores. Si reescribimos esta expansión por componentes y hacemos uso de la base $\{\varepsilon^{(\lambda)}\}_\lambda$, obtenemos:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k}\left(C_\mu(k)\, e^{-ik\cdot x} + C_\mu(k)^* e^{ik\cdot x}\right)\Big|_{k^0=\omega_k} \qquad (40)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} \sum_{\lambda=0}^{3}\left(C^{(\lambda)}(k)\, \varepsilon^{(\lambda)}_\mu(k)\, e^{-ik\cdot x} + C^{(\lambda)*}(k)\, \varepsilon^{(\lambda)*}_\mu(k)\, e^{ik\cdot x}\right)\Big|_{k^0=\omega_k}$$

Observaciones:

- Como la expansión (40) es -por construcción- real, no hay nada que nos obligue a escoger una base $\varepsilon^{(\lambda)}_\mu(k)$ cuyas componentes sean reales. Esto es relevante, en particular, si deseamos considerar estados de polarización circular. Sin embargo, en lo que sigue seguiremos trabajando con la base real definida por (33)-(35).

- Como era de esperarse, los coeficientes $c^{(\lambda)*}(k)$ y $c^{(\lambda)}(k)$ pasaran, al cuantizar, a jugar el rol de operadores de creación/aniquilación de fotones. En particular, un vector de la forma
$$\hat{c}^{(\lambda)+}(\vec{k})|0\rangle$$
representará un estado de un fotón con momento $\vec{k}$, energía $\omega_k = \|\vec{k}\|$ y polarización λ.

- Aunque aparentemente los grados de libertad "no físicos" ($\lambda=0, \lambda=3$) siguen presentes en la teoría, la forma de eliminarlos será a través de la implementación de la condición de Lorenz a nivel cuántico (cf. (26), (38), (39))

  $\longrightarrow$ Los estados físicos $|\Psi\rangle$ de la teoría serán aquellos que satisfagan la condición
$$\left(\hat{c}^{(0)}(\vec{k}) - \hat{c}^{(3)}(\vec{k})\right)|\Psi\rangle = 0 \qquad (41)$$

Las relaciones de conmutación.

Finalmente, partiendo de la expansión de Fourier (40), y postulando las relaciones de conmutación (15) (ver también (21)–(24)), llegamos a las siguientes relaciones de conmutación (ejercicio):

$$\boxed{\begin{aligned} \left[\hat{c}^{(\lambda)}(k), \hat{c}^{(\lambda')+}(k')\right] &= -2\omega_k\, g^{\lambda\lambda'}\, \delta(\vec{k}-\vec{k}'), \\ \left[\hat{c}^{(\lambda)}(k), \hat{c}^{(\lambda')}(k')\right] &= 0 = \left[\hat{c}^{(\lambda)+}(k), \hat{c}^{(\lambda')+}(k')\right] \end{aligned}} \qquad (42)$$