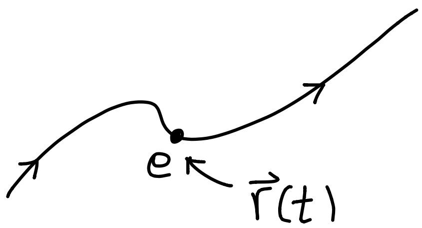
Scattering clásico de radiación (Thomson)*

Como sabemos de electrodinámica clásica, una carga eléctrica acelerada radia campos electromagnéticos.

Repasemos brevemente cómo se llega a esta conclusión a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Para esto, consideremos una partícula de carga "e" que sigue una trayectoria $t \longmapsto \vec{r}(t)$



A lo largo de su trayectoria, dicha partícula da lugar a una densidad de carga, así como a una densidad de corriente. Estas están dadas por las siguientes expresiones:

$$\rho(x) = \rho(t,\vec{x}) = e\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}(t))$$

$$\vec{j}(x) = \vec{j}(t,\vec{x}) = e\,\vec{v}(t)\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}(t)) \qquad \left[\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)\right]$$

Usando el gauge de Lorenz $(\partial_\mu A^\mu = 0)$ vemos que para las ecs. de Maxwell inhomogéneas, se tiene:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \longleftrightarrow \quad \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \underbrace{(\partial_\mu A^\mu)}_{=\,0 \text{ (gauge de Lorenz)}} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

(*) Los cálculos de estas notas los haremos en unidades Gaussianas.

Esto quiere decir que A^ν satisface la ecuación de onda (ec. de Klein-Gordon con $m=0$!) con j^ν como término fuente.
Una ecuación de este tipo se puede solucionar fácilmente usando técnicas de funciones de Green.

En nuestro caso, se trata de resolver la siguiente ecuación,

$$\partial_\mu \partial^\mu G(x,x') = \delta^{(4)}(x-x'),$$

una de cuyas soluciones está dada por

$$G_R(x,x') = \frac{1}{2\pi}\,\theta(x^0 - x'^0)\,\delta\left((x-x')^2\right)$$

Una vez conocida la función de Green apropiada para este problema (en este caso G_R, la "función de Green retardada"), podemos obtener la solución de la ec. de onda en presencia de una fuente a partir de

$$A^\nu(x) = \int d^4x'\, G_r(x-x')\, j^\nu(x').$$

En nuestro caso, podemos escribir ρ, $\vec{j}$ de forma covariante:

$$j^\nu(x) = ec\int d\sigma\, u^\nu(\sigma)\,\delta^{(4)}(x - r(\sigma)) \longleftarrow \underbrace{d\sigma}_{\text{tiempo propio}} = \frac{ds}{\gamma},$$

$$r(\sigma) = (cs, \vec{r}(s)),$$

$$u(\sigma) = (\gamma, \gamma\vec{v}(s)).$$

Verifiquemos que, en efecto, esta es la versión covariante de las expresiones para ρ y $\vec{j}$ que introdujimos en la página anterior. Para comenzar, notemos que σ es un parámetro de integración que representa el tiempo propio de la partícula. Si observamos el movimiento de la partícula desde un marco de referencia "S", con una variable de tiempo que llamaremos "s", entonces la relación entre s y σ está dada por el factor de dilatación temporal (instantáneo) γ. Es decir, debemos tener

$$d\sigma = \frac{ds}{\gamma} \quad , \quad \text{donde} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + v(s)^2/c^2}}$$

Con estas convenciones, la trayectoria de la partícula, escrita en forma covariante ("línea de mundo") será

$$r(\sigma) = (cs\,,\ \vec{r}(s)).$$

El 4-vector de velocidad correspondiente ($u = dr/d\sigma$) es

$$u(\sigma) = (c\gamma,\ \gamma\vec{v}(s)).$$

Con esto podemos evaluar la componente j^0, así como las componentes j^k ($k=1,2,3$) en el marco de referencia S:

$$j^0(t,\vec{x}) = ec\int \frac{ds}{\gamma}\, u^0(s)\, \delta^{(1)}(ct-cs)\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{r}(s))$$

$$= ec\int \frac{ds}{\gamma}\, c\gamma \cdot \frac{1}{c} \cdot \delta^{(1)}(t-s)\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{r}(s))$$

$$= ec\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{r}(t)) = c\,\rho(t,\vec{x}), \qquad \underline{\text{ok}}$$

$$j^k(t,\vec{x}) = ec\int \frac{ds}{\gamma}\, \gamma\, v^k(s)\, \delta^{(1)}(ct-cs)\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{r}(s))$$

$$= e\,v^k(t)\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{r}(t)). \qquad \underline{\underline{\text{ok}}}$$

De vuelta al potencial:

$$A^\nu(x) = \int d^4x' \; G_R(x-x') \, \frac{4\pi}{c} j^\nu(x')$$

$$= \frac{4\pi}{c} \int d^4x' \; G_R(x,x') \, ec \int d\sigma \, u^\nu(\sigma) \, \delta^{(4)}(x'-r(\sigma))$$

$$= \frac{4\pi}{c} \int d^4x' \int d\sigma \, \frac{ec}{2\pi} \, \theta(x^0-x'^0) \, \delta((x-x')^2) \, u^\nu(\sigma) \, \delta^{(4)}(x'-r(\sigma))$$

$$= 2e \int d\sigma \, \theta(x^0-cs) \, \delta^{(1)}((x-r(\sigma))^2) \, u^\nu(\sigma)$$

(recordar la relació entre s y σ!)

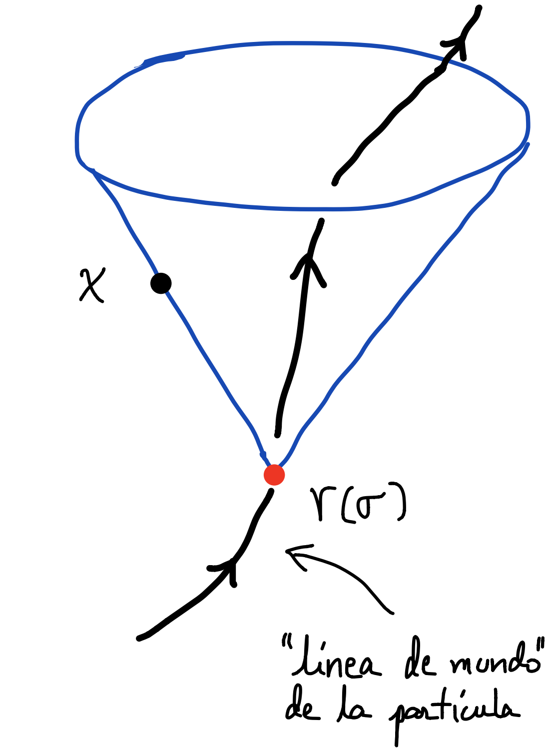
Antes de evaluar la integral, detengámonos un momento para discutir la fórmula que hemos obtenido:

$$A^\nu(x) = 2e \int d\sigma \, \theta(x^0 - r^0(\sigma)) \, \delta^{(1)}((x-r(\sigma))^2) \, u^\nu(\sigma) \qquad (*)$$

La partícula de carga e recorre una trayectoria $r(\sigma)$ en el espacio-tiempo. Su velocidad $u(\sigma)$ da lugar a una corriente eléctrica, que actúa como <u>fuente</u> en las ecuaciones de Maxwell.

En cada momento, la partícula está generando un campo E.M. Dicho campo, por supuesto, se propaga a una velocidad c. Por lo tanto, es de esperarse que el campo $A^\nu(x)$ detectado por un observador en el punto x sea causado por la carga e cuando esta se encontraba en algún lugar, en el pasado, tal que x se encuentre en el cono de luz futuro del punto de emisión.

Para interpretar los diferentes términos que aparecen en el integrando de (*), hagamos referencia al siguiente diagrama:



- El término $\delta^{(1)}((x-r(\sigma))^2)$ hace que $r(\sigma)$ contribuya a $A^\nu(x)$ si y solo si x está en el cono de luz de $r(\sigma)$.
- De hecho, x debe estar, en realidad, en el cono de luz futuro de $r(\sigma)$. Esto es lo que garantiza la presencia del término $\theta(x^0-r^0(\sigma))$.

Para resolver la integral, basta con hacer uso de la identidad

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x_i)}{|f'(x_i)|},$$

donde $\{x_i\}_i$ es el conjunto de puntos en los que se anula $f \to f(x_i)=0$

En nuestro caso tenemos $f(\sigma) = (x-r(\sigma))^2$, así que

$$f'(\sigma) = \frac{df}{d\sigma} = -2(x-r(\sigma))_\mu \underbrace{\frac{dr^\mu(\sigma)}{d\sigma}}_{=u^\mu(\sigma)} = -2(x-r(\sigma))\cdot u(\sigma)$$

Notemos ahora que $x-r(\sigma)$ es un vector nulo (tipo luz), mientras que $u(\sigma)$ es de tipo tiempo (asumimos que la partícula cargada es masiva). Esto implica que, para todos los x y σ que cumplan la condición de cono de luz, tendremos $(x-r(\sigma))\cdot u(\sigma) > 0$

Para verificar la anterior afirmación basta con evaluar el producto de los 2 vectores en el marco de reposo de la partícula.

Ahora debemos encontrar los ceros de $f(\sigma)$. Del gráfico es claro que solo hay uno, al que denominaremos τ_0

Ahora sí podemos evaluar la integral:

$$A^{\nu}(x) = 2e \int d\sigma \, \Theta(x^0 - r^0(\sigma)) \, \delta^{(1)}((x-r(\sigma))^2) \, u^{\nu}(\sigma)$$

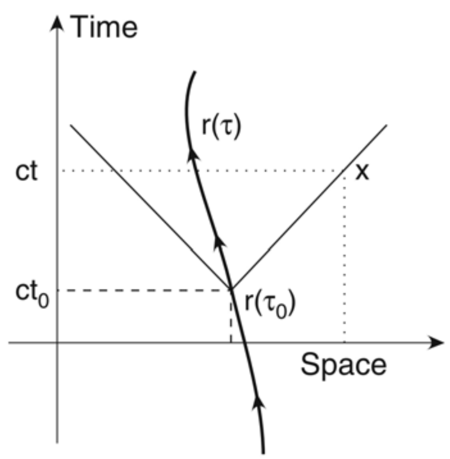
$$= 2e \int d\sigma \, \Theta(x^0 - r^0(\tau_0)) \, \frac{\delta^{(1)}(\sigma - \tau_0)}{2(x - r(\tau_0)) \cdot u(\tau_0)} \, u^{\nu}(\tau_0)$$

$$= e \, \frac{u^{\nu}(\tau_0)}{u(\tau_0) \cdot (x - r(\tau_0))}$$

Este potencial se conoce como el potencial de Liénard-Wiechert:

$$A^{\mu}(x) = e \, \frac{u^{\mu}(\tau_0)}{u(\tau_0) \cdot (x - r(\tau_0))} \, ,$$

donde τ^0 es aquella coordenada temporal (tiempo propio) de la partícula, tal que se cumple la condición de cono de luz.



Este gráfico, tomado del cap. 3 del libro "Classical Field Theory" (F. Scheck), ilustra claramente el significado de todas las variables.

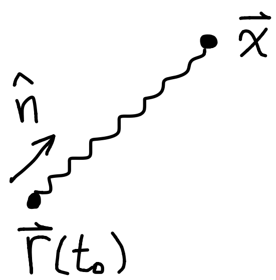
En el sistema S tenemos $u = (\gamma, \gamma \vec{v})$, $r = (ct_0, \vec{r}(t_0))$, donde estamos considerando ambos vectores evaluados en el tiempo "retardado" t_0.

Tenemos, por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
u \cdot (x - r) &= u^0 (x^0 - r^0) - \vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{r}) \\
&= \gamma (x^0 - ct_0) - \gamma \vec{v} \cdot (\vec{x} - \vec{r})
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ x debe estar en el cono de luz futuro de $r(t_0) = (ct_0, \vec{r}(t_0))$.

$\hookrightarrow$ esta condición determina el valor de t_0:



$$x^0 = ct$$

$$\underbrace{c(t - t_0)}_{\text{positivo}} = \| \vec{x} - \vec{r}(t_0) \| \equiv R$$

$\nearrow$ $c(t - t_0) = R$

$\vec{v} \cdot (\vec{x} - \vec{r}) = \vec{v} \cdot \hat{n}\, R$

$\longrightarrow$ $t = t_0 + R/c$

Con esto llegamos a las expresiones finales para los potenciales ϕ y $\vec{A}$:

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{e}{R} \left. \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \hat{n}} \right|_{\text{ret}}$$

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{e}{R} \left. \frac{\vec{v}/c}{1 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \hat{n}} \right|_{\text{ret}}$$

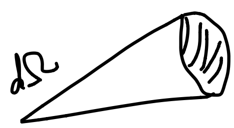
$$\vec{E} = \vec{E}_{st} + \vec{E}_{rad}, \qquad E_{st} \propto \frac{1}{R^2}, \qquad E_{rad} \propto \frac{1}{R}$$

$$\vec{E}_{rad}(t,\vec{x}) = \frac{e}{R}\, \frac{\hat{n}\times\left((\hat{n}-\vec{v}/c)\times\dot{\vec{v}}\right)}{c^2\left(1-\frac{1}{c}\vec{v}\cdot\hat{n}\right)^3}\Bigg|_{ret}$$

$$\frac{v}{c} \ll 1 \rightsquigarrow \vec{E}_{rad} \approx \frac{e}{R}\frac{1}{c^2}\,\hat{n}\times(\hat{n}\times\dot{\vec{v}})\Big|_{ret}$$

Vector de Poynting $\longrightarrow$ $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times(\hat{n}\times\vec{E}) \approx \frac{c}{4\pi}\|\vec{E}\|^2\hat{n}$

Scattering (Thomson)



Área = $R^2 d\Omega$

$\vec{E}_{in}$: campo incidente

Ec. movimiento : $e\vec{E}_{in} = m\dot{\vec{v}}$.

Potencia radiada:

Flujo incidente: $\frac{c}{4\pi}\|\vec{E}_{in}\|^2\hat{k}$

$$dP = \vec{S}\cdot d\vec{A}$$

$$= \frac{c}{4\pi}R^2 d\Omega\, \|\vec{E}_{rad}\|^2$$

θ : ángulo entre $\hat{n}$ y $\dot{\vec{v}}$

$$= d\Omega\, R^2 \frac{c}{4\pi}\frac{e^2}{R^2}\frac{1}{c^4}\|\hat{n}\times(\hat{n}\times\dot{\vec{v}})\|^2_{ret} = \frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\, d\Omega$$

$$\searrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\dot{v}^2\sin^2\theta = \frac{e^2}{4\pi c^3}\cdot\frac{e^2}{m^2}\|E_{in}\|^2\sin^2\theta$$

$$= \frac{e^4}{m^2c^4}\,\frac{c}{4\pi}\|E_{in}\|^2\sin^2\theta$$

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2.82\times10^{-13}\,\text{cm}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta, \qquad \sigma_T = \frac{8\pi}{3}r_0^2}$$