La Electrodinámica de Maxwell en formulación covariante.

En unidades Gaussianas, las ecs. de Maxwell son:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \,, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \,,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \,, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + 4\pi\vec{j}$$

En la versión covariante, la densidad de carga ρ y la densidad de corriente $\vec{j}$ forman parte de un mismo 4-vector: $j^{\nu} := (c\rho, \vec{j})$.

Definiendo las componentes del "tensor de Faraday" $F = F_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}$ como

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

es fácil ver que las ecs. $(*)$ toman la siguiente forma, más compacta:

ecs. inhomogéneas $\longrightarrow \partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^{\nu}$,

ecs. homogéneas $\rightarrow \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\partial^{\nu} F^{\sigma\tau} = 0$,

donde $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$ es el tensor antisimétrico ($\varepsilon_{0123} = 1 = -\varepsilon_{0213}$, etc.).

Las ecs. homogéneas también se pueden escribir de la forma

$$\partial^{\nu}F^{\sigma\tau} + \partial^{\sigma}F^{\tau\nu} + \partial^{\tau}F^{\nu\sigma} = 0 \,, \quad \text{para} \quad \nu\neq\sigma\neq\tau.$$

- Recordando que es posible expresar los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en términos de potenciales ϕ y $\vec{A}$ a través de

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \,,$$

y que la libertad gauge de la teoría se manifiesta en el hecho de que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ permanecen invariantes bajo transformaciones de la forma

$$\phi \longmapsto \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t},$$

$$\vec{A} \longmapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi,$$

es entonces natural considerar el campo $A_\mu := (\phi, \vec{A})$, de donde se sigue que

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .} \qquad (**)$$

Así mismo, cabe observar que la ec. de continuidad toma ahora la forma $\partial_\mu j^\mu = 0$ $\left(\leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0\right)$.

En resumen (y pasando ahora a unidades naturales), tenemos:

- Ecs. Maxwell: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$
  $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\partial^\nu F^{\sigma\tau} = 0$
- Tensor de Faraday. $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
- Transformaciones gauge. $A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi.$
- Ec. continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0.$

→ Buscamos ahora un Lagrangiano a partir del cual podamos obtener las ecs. de movimiento, para así proceder a cuantizar, de forma análoga a como hicimos en el caso del campo escalar.

Si consideramos la dinámica del campo E.M. inducida por una distribución j^μ de cargas/corrientes (vistas como fuentes externas), podemos escribir:

$$\mathcal{L}_{EM}(A_\mu, \partial^\nu A_\mu ; j_\nu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \overbrace{j_\mu A^\mu}^{\text{término fuente} \ldots}_{\text{acoplamiento "radiación-materia"}}$$

Mientras que las ecuaciones homogéneas se siguen directamente de la definición (**) (ejercicio), las inhomogéneas se obtienen como solución a las ecs. de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_\mu)} = \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \xrightarrow{\text{EJERCICIO!}} \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu .$$

Por ahora estamos interesados en la cuantización del campo E.M. en el vacío, así que tomaremos $j^\nu = 0$.

- Variables canónicas: Cada componente del campo A_μ tiene su variable de momento canónico conjugado asocida, π^μ:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}$$

La forma mas eficiente de calcular π^μ es calculando la derivada $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\tau)}$ en general, y luego tomar $\sigma = 0$.

Veamos:

- Para el primer término del Lagrangiano, tenemos:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

$$= -\frac{1}{4}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}(\partial_\alpha A_\beta \partial_\mu A_\nu - \partial_\alpha A_\beta \partial_\nu A_\mu - \partial_\beta A_\alpha \partial_\mu A_\nu + \partial_\beta A_\alpha \partial_\nu A_\mu).$$

- Ahora bien,

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma A_\tau)}\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}(\partial_\alpha A_\beta)(\partial_\mu A_\nu)\right) = 2\,\partial^\sigma A^\tau,$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma A_\tau)}\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{4}\left(2\partial^\sigma A^\tau - 2\partial^\tau A^\sigma - 2\partial^\tau A^\sigma + 2\partial^\sigma A^\tau\right)$$

$$= F^{\tau\sigma} = -F^{\sigma\tau}.$$

$\Rightarrow$

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -F^{0i} = E^i;$$

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = -F^{00} = 0 \quad !$$

$\pi^0 = 0 \longrightarrow$ Problemas, ya que quisiéramos poder postular relaciones de conmutación de la forma $[\hat{A}^0, \hat{\pi}^0]$... pero cómo obtener el operador $\hat{\pi}^0$ si la "variable clásica" π^0 es cero?

Teorema de Poynting / Radiación

Como hemos visto, las ecuaciones de Maxwell se pueden obtener a partir de un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu .$$

Podemos obtener -via transformada de Legendre- la **densidad** Hamiltoniana $\mathcal{H}_{EM}$ que corresponde a $\mathcal{L}_{EM}$. La integral $\int d^3x\, \mathcal{H}_{EM}$ **debe** ser entonces interpretada como la energia del campo EM, en interacción con "fuentes" (cargas y corrientes) determinadas por $j^\mu = (\rho, \vec{j})$.

En unidades naturales, está energía está dada por

$$H_{EM} = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \|\vec{E}(x)\|^2 + \frac{1}{2} \|\vec{B}(x)\|^2 - \vec{j}(x) \cdot \vec{A}(x) \right).$$

Tal como hicimos en el caso del campo escalar, es posible obtener cantidades conservadas haciendo uso del teorema de Noether, siempre y cuando el Lagrangiano sea invariante bajo un grupo dado de transformaciones. Consideremos por lo tanto la invarianza de $\mathcal{L}_{EM}$ bajo traslaciones espacio-temporales (para esto debemos asumir que no hay cargas ni corrientes $\rightarrow j^\mu = (0,0,0,0)$).

La forma general del tensor de energía-momento (obtenido via teorema de Noether bajo la hipótesis de invarianza traslacional) es

$$T^{\mu\nu} = \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^{(i)})} \partial^\nu \psi^{(i)} \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} ,$$

donde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi^{(i)}, \partial_\nu \psi^{(i)})$ es un Lagrangiano general.

La ley de conservación que se obtiene, hemos visto, es ue la forma

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \,,$$

de tal forma que la integral (sobre $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) de la componente T^{0i} nos da una de las 4 cantidades conservadas. En el caso del campo EM, tenemos ($j^\mu = 0$):

$$T^{\mu\nu}_{EM} = F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \,,$$ donde se cumple la ley de conservación:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{EM} = 0 \,.$$

Las diferentes componentes se pueden clasificar de la siguiente forma ($T^\mu{}_\nu = T^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu}$):

1) $(T_{EM})^0{}_0 = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \equiv u(x) \longrightarrow$ densidad de energía.

2) $(T_{EM})^0{}_i = -(\vec{E} \times \vec{B}) \equiv -c\, P^i(x) \longrightarrow \vec{P} = (P^1, P^2, P^3)$: vector de densidad de momento lineal.

3) $(T_{EM})^i{}_0 = +(\vec{E} \times \vec{B})^i \equiv \frac{1}{c} S^i(x) \to \vec{S} = (S^1, S^2, S^3)$: vector de Poynting.

4) $(T_M)^k{}_i = E^k E^i + B^k B^i - \frac{1}{2}\delta^{ik}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \longrightarrow$ Tensor de "stress" de Maxwell.

En términos de estas cantidades tenemos que, en el vacío, la ley de conservación $\partial_\mu T^{\mu\nu}_{EM} = 0$ toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x) + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \,,$$

así que podemos ver al vector de Poynting $\vec{S}$ como un (campo vectorial) que representa la <u>densidad de flujo de energía</u>.

En presencia de fuentes ($j^\mu \neq 0$) ya **no** tenemos la misma ley de conservación. Sin embargo aún podemos calcular $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ y ver qué resulta:

$$\rightarrow \quad \partial_\mu T_{EM}^{\mu\nu} + F^\nu{}_\alpha j^\alpha = 0 .$$

El término $\nu = 0$ toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} = 0 ,$$

una ecuación de balance. Considerando una región Ω (volumen) y la superficie que lo rodea ($\partial\Omega$), tenemos:

$$\int_\Omega d^3\vec{x} \, \frac{\partial}{\partial t} u(x) = \frac{d}{dt} \int_\Omega d^3\vec{x} \, u(x) = \frac{d}{dt} U_{campo} \quad \text{(variación de la energía del campo)}$$

$$\int_\Omega d^3\vec{x} \, \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{d}{dt} U_{mec} \quad \text{(variación de la energía mecánica de las partículas en el interior de } \Omega)$$

$$\searrow \quad \frac{d}{dt}\left(U_{campo} + U_{mec} \right) = - \int_{\partial\Omega} \vec{S} \cdot d\vec{A} \qquad \text{"Teorema de Poynting"}$$

Esto nos muestra que, en efecto, $\vec{S}$ representa el flujo de energía.