El teorema de Wick (caso bosónico)

Al estudiar la cuantización del campo escalar, vimos que el conmutador $[\varphi(x), \varphi(y)]$ era proporcional a una distribución (denotada $\Delta_0(x-y;m)$ en las notas) con unas importantes propiedades relacionadas con la causalidad de la teoría. Δ_0 es una solución homogénea de la ec. de Klein-Gordon, que puede escribirse como la suma de 2 funciones Green del operador $\partial_\mu \partial^\mu + m^2$. Muy pronto se hará evidente que diversos tipos de funciones de Green de este operador ("operador de Klein-Gordon") son objetos <u>muy</u> relevantes.

En particular, el "propagador de Feynman", Δ_F, es una f. de Green que jugará un papel importante a la hora de estudiar procesos de scattering por medio de diagramas de Feynman. Como hemos mencionado, a estos diagramas se puede llegar a través de la serie de Dyson, una expansión perturbativa para el operador de scattering.

En primera instancia, la mayor complicación que aparece al querer escribir los diferentes términos de la serie es de tipo combinatorio. Por esta razón es conveniente discutir ahora los teoremas de Wick.

→ Para un sistema descrito en términos de operadores <u>bosónicos</u> $a_i^\dagger, a_j$, sujetos a reglas de conmutación de la forma

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \qquad [a_i, a_j] = 0 = [a_i^\dagger, a_j^\dagger], \tag{1}$$

consideremos operadores de la forma

$$\mathcal{O} = \sum_k (\alpha_k a_k^\dagger + \beta_k a_k), \tag{2}$$

es decir, operadores que sean lineales en los a_i y $a_i^\dagger$.

Aunque por simplicidad estamos usando índices discretos, los resultados que obtendremos seguirán siendo válidos en el caso de índices continuos, teniendo en cuenta que las sumas deben ser reemplazadas por integrales.

Consideremos n operadores $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n$ de la forma (2).
Entonces tenemos el siguiente

Teorema (Wick)

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\cdots\mathcal{O}_n = {} & :\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n: + \sum_{i<j}\langle 0|\mathcal{O}_i\mathcal{O}_j|0\rangle :\mathcal{O}_1\cdots\cancel{\mathcal{O}_i}\cdots\cancel{\mathcal{O}_j}\cdots\mathcal{O}_n: \\ & + \sum_{\substack{i_1<j_1\\ i_2<j_2}}\langle 0|\mathcal{O}_{i_1}\mathcal{O}_{j_1}|0\rangle\langle 0|\mathcal{O}_{i_2}\mathcal{O}_{j_2}|0\rangle :\mathcal{O}_1\cdots\cancel{\mathcal{O}_{i_1}}\cdots\cancel{\mathcal{O}_{j_1}}\cdots\cancel{\mathcal{O}_{i_2}}\cdots\cancel{\mathcal{O}_{j_2}}\cdots\mathcal{O}_n: \qquad (3)\\ & + \cdots \ (\text{todos los pares de contracciones})\end{aligned}}$$

$\cancel{\mathcal{O}_i} \equiv$ omitir

• Ejemplo:

$$\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3 = :\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3: + \langle 0|\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2|0\rangle\mathcal{O}_3 + \langle 0|\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3|0\rangle\mathcal{O}_1 + \langle 0|\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3|0\rangle\mathcal{O}_2 \qquad (4)$$

Un buen ejercicio consiste en verificar esta identidad en un ejemplo explícito, por ejemplo,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &= a_k\\ \mathcal{O}_2 &= a_l^\dagger + a_l\\ \mathcal{O}_3 &= a_p^\dagger - a_q\end{aligned}$$

→ donde los valores de los índices k, l, p, q son arbitrarios.

$$\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3 = a_k(a_l^\dagger + a_l)(a_p^\dagger - a_q) = (\underbrace{a_k a_l^\dagger}_{=\delta_{kl}+a_l^\dagger a_k \ (1)} + a_k a_l)(a_p^\dagger - a_q) = \dots$$

$$\dots = a_l^\dagger a_p^\dagger a_k + a_p^\dagger a_k a_l - a_l^\dagger a_k a_q - a_k a_l a_q + \delta_{kp} a_l^\dagger + \delta_{lk} a_p^\dagger + \delta_{kp} a_l + \delta_{lp} a_k - \delta_{kl} a_q,$$

resultado que coincide con la afirmación del teorema → (4), si tenemos en cuenta que $\langle 0|a_i a_j^\dagger|0\rangle = \delta_{ij}$.

La demostración del teorema se hace por inducción, y se sigue fácilmente del siguiente

<u>Lema</u>: $$:\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n: \mathcal{O} = :\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \cdots \mathcal{O}_n \mathcal{O}: + \sum_{j=1}^{n} \langle 0 | \mathcal{O}_j \mathcal{O} | 0 \rangle :\mathcal{O}_1 \cdots \cancel{\mathcal{O}_j} \cdots \mathcal{O}_n: \qquad (5)$$

Demostración: $\longrightarrow$ ejercicio!

Nota: en este contexto es usual introducir la siguiente notación (contracción de Wick) $\longrightarrow$ $\overbracket{\mathcal{O}_i \mathcal{O}_j} \equiv \langle 0 | \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j | 0 \rangle$, etc.,

Def. alternativa de contracción:

$$\overbracket{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2} := \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 - :\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2:$$

de tal forma que (5) se puede reescribir como

$$
\begin{aligned}
:\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n: \mathcal{O} = :\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \mathcal{O}: &+ :\overbracket{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \cdots \mathcal{O}_n \mathcal{O}}: + \\
&+ :\mathcal{O}_1 \overbracket{\mathcal{O}_2 \cdots \mathcal{O}_n \mathcal{O}}: \\
&+ \\
&\;\vdots \\
&+ :\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \cdots \overbracket{\mathcal{O}_n \mathcal{O}}: .
\end{aligned}
$$

Un caso especial del teorema de Wick es aquel en el que el producto que consideramos es de la forma

$$:A_1 \cdots A_k: :\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n: :B_1 \cdots B_\ell:, \qquad (6)$$

donde los A_i y B_j son, al igual que los $\mathcal{O}$'s, combinaciones de la forma (2)

En este caso, el teorema de Wick aplica <u>casi</u> de la misma forma que para el producto

$$A_1 \cdots A_k \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n B_1 \cdots B_\ell,$$

con la diferencia de que <u>no</u> se deben tener en cuenta contracciones al interior de cada uno de los grupos que ya vienen normalmente ordenados. Es decir, un término como

$$:A_1 \cdots \overbracket{A_j \cdots A_k \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_\ell \cdots \mathcal{O}_n B_1 \cdots B_\ell}:$$

sí se debe incluir, mientras que uno de la forma

$$:A_1 \cdots \overbrace{A_i \cdots A_j} \cdots A_k\, \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n B_1 \cdots B_\ell :$$

<u>no</u> se debe incluir. Demostración $\rightsquigarrow$ ejercicio.

Como ilustración, consideremos el siguiente ejemplo sencillo:

$\mathcal{O}_1 = a_k$, $\mathcal{O}_2 = a_\ell^\dagger + a_\ell$, $A_1 = a_i$, $A_2 = a_j^\dagger$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
:\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2: :A_1A_2: &= :(a_k a_\ell^\dagger + a_k a_\ell): :a_i a_j^\dagger: \\
&= (a_\ell^\dagger a_k + a_k a_\ell)(a_j^\dagger a_i) \\
&= a_\ell^\dagger a_k a_j^\dagger a_i + a_k a_\ell a_j^\dagger a_i \\
&= a_\ell^\dagger a_j^\dagger a_k a_i + a_j^\dagger a_k a_\ell a_i + \delta_{kj} a_\ell^\dagger a_i + \delta_{kj} a_\ell a_i + \delta_{\ell j} a_k a_i . \qquad (7)
\end{aligned}
$$

aquí usamos Wick

Por otro lado, aplicando el caso especial para operadores de la forma (6), tenemos:

$$
\begin{aligned}
:\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2: :A_1A_2: &= :\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2A_1A_2: + \cancel{:\overbrace{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2A_1}A_2:}\to 0 + :\overbrace{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2A_1A_2}: + \cancel{:\mathcal{O}_1\overbrace{\mathcal{O}_2A_1}A_2:}\to 0 \\
&\quad :\mathcal{O}_1\overbrace{\mathcal{O}_2A_1A_2}: + \cancel{:\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2A_1A_2:}\to 0 + \cancel{:\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2A_1A_2:}\to 0 \\
&= :a_k(a_\ell^\dagger + a_\ell)a_i a_j^\dagger: + \delta_{kj} :(a_\ell^\dagger + a_\ell)a_i: + \delta_{\ell j}\, a_k a_i \\
&= a_\ell^\dagger a_j^\dagger a_k a_i + a_j^\dagger a_k a_\ell a_i + \delta_{kj} a_\ell^\dagger a_i + \delta_{kj} a_\ell a_i + \delta_{\ell j} a_k a_i ,
\end{aligned}
$$

que coincide con (7).

Ahora vamos a considerar la versión que más nos interesa del teorema de Wick, que es aquella que incluye productos temporalmente ordenados.

Comencemos por recordar que, según la serie de Dyson, es conveniente considerar el siguiente operador, T, que llamaremos el operador de ordenamiento temporal.

Consideremos para este efecto operadores (en general; aquí no necesariamente deben ser lineales en los op. de creación y destrucción) que dependan del tiempo: $A_1(t)$, $A_2(t)$, ..

Con esto definimos

$$T\big(A_1(t_1)A_2(t_2)\cdots A_n(t_n)\big) = A_{\sigma(1)}(t_{\sigma(1)})A_{\sigma(2)}(t_{\sigma(2)})\cdots A_{\sigma(n)}(t_{\sigma(n)}), \qquad (8)$$

donde $\sigma \in S_n$ es aquella permutación tal que

$$t_{\sigma(1)} \geqslant t_{\sigma(2)} \geqslant \cdots \geqslant t_{\sigma(n)}.$$

Así, por ejemplo, tendremos

$$T\big(A_1(t_1)A_2(t_2)\big) = \begin{cases} A_1(t_1)A_2(t_2), & t_1 > t_2 \\ A_2(t_2)A_1(t_1), & t_2 > t_1 \end{cases} \qquad (9)$$

Nótese que esta definición presenta una posible ambigüedad en $t_1 = t_2$, hecho que ignoraremos por el momento.

Podemos también escribir (9) de la siguiente forma:

$$T\big(A_1(t_1)A_2(t_2)\big) = \theta(t_1-t_2)A_1(t_1)A_2(t_2) + \theta(t_2-t_1)A_2(t_2)A_1(t_1) \qquad (10)$$

→ Ahora modificaremos la definición de "contracción" $\overline{AB}$ para incluir productos cronológicamente ordenados, de la siguiente forma:

Apareamiento cronológico (caso bosónico, θ_i como en (2)):

$$T\big(\theta_1(x)\,\theta_2(y)\big) = :\theta_1(x)\,\theta_2(x): + \overline{\theta_1(x)\theta_2(y)}. \qquad (11)$$

Esto lo podemos reescribir como

$$\overline{\theta_1(x)\theta_2(y)} = T\big(\theta_1(x)\,\theta_2(y)\big) - :\theta_1(x)\theta_2(y):,$$ de tal forma que,

a través de (3), obtenemos →

$\underline{x^0 > y^0}$:

$$\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y) = T\big(\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\big) - :\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y):$$

$$= \mathcal{O}_1(x)\,\mathcal{O}_2(y) - :\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y):$$

$$\overset{(3)}{=} \cancel{:\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y):} + \langle 0|\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)|0\rangle - \cancel{:\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y):}$$

$$= \langle 0|\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)|0\rangle .$$

$\underline{y^0 > x^0}$:

$$\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y) = T\big(\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\big) - :\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y):$$

$$= \mathcal{O}_1(y)\,\mathcal{O}_2(x) - :\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y):$$

$$\overset{(3)}{=} \cancel{:\mathcal{O}_1(y)\mathcal{O}_2(x):} + \langle 0|\mathcal{O}_1(y)\mathcal{O}_2(x)|0\rangle - \cancel{:\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y):}$$

(recordar que $:\cdots:$ es simétrico en sus argumentos)

$$= \langle 0|\mathcal{O}_1(y)\mathcal{O}_2(x)|0\rangle .$$

$$\to \quad \overbrace{\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)} = \langle 0|T\big(\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\big)|0\rangle . \qquad (12)$$

Generalizando esta idea para el caso de n operadores $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$, obtenemos:

Teorema de Wick (para productos cronológicos, caso bosónico):

> El producto cronológico (T) de n operadores (lineales en los operadores de creación/destrucción) es igual a la suma de los productos normalmente ordenados con todos los apareamientos cronológicos ("contracciones") posibles.

En fórmulas,

$$\boxed{\begin{aligned} T(\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n) = {}& :\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n: + \sum_{i<j}\langle 0|T(\mathcal{O}_i\mathcal{O}_j)|0\rangle :\mathcal{O}_1\cdots\cancel{\mathcal{O}_i}\cdots\cancel{\mathcal{O}_j}\cdots\mathcal{O}_n: \\ &+ \sum_{\substack{i_1<j_1\\ i_2<j_2}}\langle 0|T(\mathcal{O}_{i_1}\mathcal{O}_{j_1})|0\rangle\langle 0|T(\mathcal{O}_{i_2}\mathcal{O}_{j_2})|0\rangle :\mathcal{O}_1\cdots\cancel{\mathcal{O}_{i_1}}\cdots\cancel{\mathcal{O}_{j_1}}\cdots\cancel{\mathcal{O}_{i_2}}\cdots\cancel{\mathcal{O}_{j_2}}\cdots\mathcal{O}_n: \\ &+ \cdots \text{ (todos los pares de contracciones)}. \qquad (13) \end{aligned}}$$