§4. Representaciones de grupos

Recordemos la definición del grupo general lineal de un espacio vectorial V:

$$Gl(V) = \{T : V \to V \mid T \text{ es lineal e invertible}\}$$

La estructura de grupo está dada por composición de transformaciones: si $T_1, T_2 \in Gl(V)$, $v \in V$, entonces

$$(T_1 \cdot T_2)(v) = T_1(T_2(v)),$$

y está claro que $T_1 \cdot T_2 \in Gl(V)$.

<u>Def.</u> (Representación) Una <u>representación</u> ρ de un grupo G en un espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho : G \to Gl(V)$.

En otras palabras, ρ asigna a cada elemento g de G una transformación lineal $\rho(g) : V \to V$. Las transformaciones correspondientes a dos elementos $g_1, g_2 \in G$ cumplen con

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2) \quad \text{y} \quad \rho(e) = id_V .$$

composición (producto) en $Gl(V)$.

De acuerdo a las definiciones anteriores, una representación de G en V puede ser vista como una acción de G en V que es lineal para cada $g \in G$.

- <u>Comentario</u>:

  Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ($n = \dim V$) es una base para V, podemos asociar a T una matriz $n \times n$ T_{ij} (la matriz de la transformación lineal) así:

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\, e_j$$

Notemos que el orden de los índices (T_{ij} ó T_{ji}) es, básicamente, un asunto de convención.

Sin embargo, para una representación, es conveniente adoptar una convención que permita representar la matriz que corresponde a dos elementos del grupo como el producto de las matrices correspondientes a cada elemento.

Concretamente, a lo que nos referimos es a lo siguiente:

Sea $r: G \longrightarrow Gl(V)$ una representación de G en V, con $n = \dim V$. Escoger una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ para V. Para cada $g \in G$, $r(g)$ es una transformación lineal de V en V. Por lo tanto, $r(g)e_i$ debe ser una combinación lineal de elementos de la base. Los coeficientes de esta combinación deben depender, por supuesto, de g. Tenemos entonces que, para $g \in G$, existen números $\alpha_{ij}(g) \in \mathbb{C}$ con $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tales que

$$r(g)e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(g)\, e_j .$$

Podemos pensar en $\alpha_{ij}(g)$ como una matriz. Si consideramos el producto $g_1 g_2$ para $g_1, g_2 \in G$, tendremos, por lo tanto:

$$r(g_1 g_2)\, e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(g_1 g_2)\, e_j . \qquad (*)$$

Por otro lado, tenemos:

$$r(g_1)\cdot r(g_2) e_i = r(g_1)\big(r(g_2)e_i\big) = r(g_1)\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(g_2)\, e_j\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(g_2)\, r(g_1) e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(g_2) \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}(g_1) e_k \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}(g_2)\, \alpha_{jk}(g_1)\, e_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}(g_1)\, \alpha_{ij}(g_2) \right) e_k$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}(g_1)\, \alpha_{ik}(g_2) \right) e_j . \quad (**)$$

Comparando $(*)$ y $(**)$, y teniendo en cuenta que para una representa-ción se debe cumplir $r(g_1 g_2) = r(g_1) r(g_2)$, obtenemos:

$$\alpha_{ij}(g_1 g_2) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}(g_1)\, \alpha_{ik}(g_2),$$

lo cual <u>no</u> es muy conveniente.

Cambiando la notación, si hacemos $R_{ij}(g) \equiv \alpha_{ji}(g)$,

la igualdad anterior se convierte en:

$$R_{ji}(g_1 g_2) = \sum_{k=1}^{n} R_{jk}(g_1) R_{ki}(g_2)$$

$$= \big(R(g_1) R(g_2) \big)_{ji}$$

$\rightarrow$ Para las matrices $R(g)$ así definidas, se cumple

$$R(g_1 g_2) = R(g_1) \cdot R(g_2)$$

producto matricial

Nótese que este <u>no</u> es el caso para las matrices $\alpha(g)$!

<u>Def.</u> (Equivalencia de representaciones)

Dadas dos representaciones ρ_1 y ρ_2 de un mismo grupo G en espacios vectoriales V_1 y V_2 respectivamente, diremos que ρ_1 es <u>equivalente</u> a ρ_2 ($\rho_1 \sim \rho_2$) si y solo si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $T: V_1 \to V_2$ con la propiedad de que para cada $g \in G$ se cumple

$$\boxed{T \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ T} \qquad (4.1)$$

Esto se puede representar, de forma muy adecuada, a través del siguiente "diagrama conmutativo":

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V_1 \arrow[d, "T"] \\
V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

<u>Observaciones.</u>

- La condición (4.1) puede expresarse también como
$$\rho_2(g) = T \circ \rho(g) \circ T^{-1}.$$
Esto quiere decir que las matrices de las 2 representaciones son "las mismas", salvo un cambio de base, que en este contexto se conoce como una "<u>transformación de similaridad</u>".

- En particular, propiedades como la traza o el espectro de $\rho(g)$ son invariantes bajo este tipo de transformaciones. De ahí la definición de representaciones equivalentes.

Def. Sean $\rho: G \longrightarrow Gl(V)$ una representación de G y W un subespacio vectorial de V: $W \leq V$.

Decimos que W es un subespacio invariante de V (respecto a ρ) si $\rho(g)(W) \subseteq W \quad \forall g \in G$.

Proposición. W es invariante $\Leftrightarrow$ $r(g)(W) = W \quad \forall g \in G$.

Demostración: Ejercicio 4.1

Def. Si $W \leq V$ es un subespacio invariante de V, entonces es claro que la restricción de ρ a W, $\rho|_W$, nos da una representación de G en W. A dicha representación,

$$\rho|_W : G \longrightarrow Gl(W),$$

la llamamos subrepresentación de ρ.

Def. Decimos que una representación $\rho: G \longrightarrow Gl(V)$ es irreducible si los únicos subespacios invariantes de V son $\{0\}$ y V.

Proposición. Sea G un grupo finito, abeliano. Entonces toda representación irreducible de G es unidimensional.

Dem.

V esp. vec. sobre $\mathbb{C}$

Recordemos que para toda transf. lineal $T: V \rightarrow V$ existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v \in V$ tales que $Tv = \lambda v$.

Sea, por lo tanto, $r: G \longrightarrow Gl(V)$ una representación irreducible de G, donde G es finito y abeliano. Dado $g_1 \in G$, sabemos entonces que podemos encontrar $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ y $v \in V$ tales que $r(g_1)v = \lambda_1 v$.

Definir $W_1 := \{ w \in V \mid r(g_1)w = \lambda_1 w \}$

(nótese que $v \in W_1$, luego $W_1 \neq \phi$).

Ahora, para $g \in G$ (arbitrario) y $w \in W_1$, tenemos:

$$r(g_1)(r(g)w) = r(g_1 g)w \underset{G \text{ abeliano}}{=} r(g g_1)w = r(g)(r(g_1)w) \overset{w \in W_1}{=} r(g)(\lambda_1 w) = \lambda_1 (r(g)w)$$

$\Rightarrow$ $r(g)w \in W_1$ (para todo $g \in G$)

$\Rightarrow$ W_1 es un subespacio invariante.

Podemos, por lo tanto, restringir r a W_1 y obtener así una subrepresentación.

Escoger ahora un segundo elemento de G, digamos g_2, con $g_2 \neq g_1$.

Repitiendo el razonamiento anterior, sabemos que existen $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ y $w \in W_1$ tales que $r|_{W_1}(g_2)w = \lambda_2 w$.

Definir, por lo tanto,

$$W_2 := \{ w' \in W_1 \mid r|_{W_1}(g_2)w' = \lambda_2 w' \} \quad (\longrightarrow W_2 \neq \phi)$$

$\searrow$ $W_2 \leq W_1$ y tenemos (para $w \in W_2$):

$$r(g_1)w = \lambda_1 w \quad (\text{ya que } W_2 \leq W_1)$$

y $$r(g_2)w = \lambda_2 w \quad (\text{ya que } w \in W_2).$$

Como G es finito, el proceso debe terminar luego de un número finito de pasos, luego de los cuales tendremos elementos $g_1, \dots, g_n \in G$ y números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ junto con una secuencia de subespacios $\{0\} \neq W_n \leq W_{n-1} \leq \dots \leq W_1 \leq V$, tales que para <u>todo</u> $w \in W_n$ se cumple

$$r(g_i)w = \lambda_i w \quad (i = 1, \dots, n). \qquad (4.2)$$

Lo anterior implica que todo subespacio unidimensional de W_n es invariante:

Si $U = \text{span}(w)$ para $w \in W_n$, entonces $r(g_i)U \subseteq U$ (por (4.2))

$\Rightarrow U$ es invariante.

Ahora bien, es fácil ver que toda representación unidimensional es irreducible, luego $r|_U$ es irreducible. Como $U \leq V$ y $\dim U = 1 \neq 0$, esto implica, en caso de que $\dim V > 1$, que V es reducible, en contradicción con la hipótesis de irreducibilidad de $V \Rightarrow \dim V = 1$.