

§ 3 G-espacios. Grupos cíclicos. Subgrupos finitos de SO(3)

Def. Sean G un grupo y M un conjunto.

Un mapa

$$\rho: G \times M \longrightarrow M$$

notación

$$(g, m) \mapsto \rho(g, m) \equiv g \cdot m$$

Con las propiedades

(i) $\rho(g_1, \rho(g_2, m)) = \rho(g_1 g_2, m)$ (para todo $g_1, g_2 \in G, m \in M$) y

(ii) $\rho(e, m) = m$ (para todo $m \in M$),

se denomina acción (a izquierda) de G sobre M .

Usando la notación abreviada $\rho(g, m) \equiv g \cdot m$, las propiedades (i) y (ii) toman la forma siguiente:

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot m) = (g_1 g_2) \cdot m, \quad e \cdot m = m$$

Una acción a derecha de G sobre M se define de manera análoga,

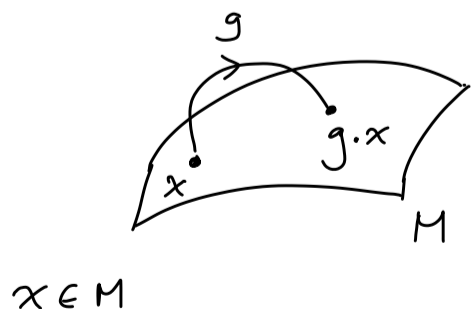
a través de un mapa $\rho_R: M \times G \longrightarrow M$

$$(m, g) \mapsto \rho_R(m, g) \equiv m \cdot g$$

En este caso, (i) y (ii)

toman la forma $(m \cdot g_1) \cdot g_2 = m \cdot (g_1 g_2), \quad m \cdot e = m$.

" G como un grupo de transformaciones de M ":



g transforma a " x " en " $g \cdot x$ ".

Ejemplo 1 $G = SO(3)$, $M = \mathbb{R}^3$

$$\rho: SO(3) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(R, \vec{r}) \mapsto \rho(R, \vec{r}) \equiv R \cdot \vec{r} = R\vec{r}$$

Ejemplo 2 $G = S_3$ (grupo de permutaciones), actuando como grupo de transformaciones de un triángulo equilátero.

Ejemplo 3 En el ejemplo 1 podemos restringir la acción de $SO(3)$ a la esfera unitaria $S^2 = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{r}\| = 1 \}$.

→ Podemos tomar $M = C(S^2) = \{ f: S^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \}$

La acción de $SO(3)$ sobre S^2 (por rotaciones) induce, de manera

natural, una acción de $SO(3)$ sobre M , que ahora es -además- un

\mathbb{R} -espacio vectorial. → Es natural definir $SO(3) \times C(M) \longrightarrow C(M)$

$$R, f \mapsto R \cdot f,$$

$$\text{donde } (R \cdot f)(\hat{x}) := f(R^{-1}\hat{x}).$$

Nótese que

(i) En el argumento de f se ha usado R^{-1} , en lugar de R . Esto es para poder obtener una acción a izquierda. Definiendo

$$R \cdot f(\hat{x}) := f(R\hat{x}) \text{ obtendríamos una acción a derecha y,}$$

por razones obvias, sería más conveniente usar la notación $f \cdot R$.

(ii) $(R \cdot f)(\hat{x}) := f(R^{-1}\hat{x})$ no es la única posibilidad. Veremos la relevancia de esta observación al estudiar, p.ej., la ec. de Dirac.

(iii) $C(M)$ es \mathbb{R} -espacio vectorial. Nótese que si $R \in SO(3)$,

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in C(M)$, entonces se tiene:

$$R \cdot (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda R \cdot f_1 + \mu R \cdot f_2 \rightarrow R \text{ como operador lineal.}$$

→ repn de $so(3)$!

Def. Decimos que $\rho: G \times M \rightarrow M$ (acción) es transitiva, si $\exists \bar{m} \in M$ tq $\forall m \in M$, $m = g \cdot \bar{m}$, para algún $g \in G$.

→ La acción de $SO(3)$ sobre la esfera unitaria S^2 es transitiva: cualquier punto sobre la esfera se puede obtener a partir del polo norte, mediante una rotación adecuada.

Def.

- Un conjunto M con una acción de un grupo G sobre este, se denomina " G -espacio".
- Si M es un G -espacio con una acción que sea transitiva, decimos que M es un espacio homogéneo.

Def. Sea M un G -espacio. Entonces definimos:

- $(m \in M): G_m = \{g \in G \mid g \cdot m = m\}$ ← grupo de isotropía/estabilidad
- $(g \in G): M_g = \{m \in M \mid g \cdot m = m\}$
- $(m \in M): O_m = \{g \cdot m \mid g \in G\}$ ← órbita de m .

En la literatura de física en inglés, se suele dar el nombre "little group" al grupo de isotropía G_m .

→ No es difícil convencerse de que, para la acción de $SO(3)$ sobre la esfera S^2 , se tiene $G_x \cong SO(2) \forall x \in S^2$.

Ejemplo: $G = \text{transf. de Lorentz} \equiv \{ \Lambda \in M_4(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta; \eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \}$

Consideremos a \mathbb{R}^4 como el espacio de "energía-momento" de una partícula. Un (cuadri-)vector en dicho espacio tiene componentes

$(\varphi^0, \vec{\varphi})$. Si se trata de una partícula de masa m , entonces

debe haber una relación entre p^0 y \vec{p} , que es justo la relación de Einstein entre masa y energía:

$$(p^0)^2 - \|\vec{p}\|^2 = m^2 \quad (E^2 = m^2 + \|\vec{p}\|^2)$$

El conjunto de puntos que satisfacen dicha relación, se encuentran sobre un hiperboloide, el "hiperboloide de masa m ".

→ La acción de G sobre dicho hiperboloide es un ejemplo de una acción transitiva.

Bajo esta acción, la órbita del punto $(m, \vec{0})$ resulta ser todo el hiperboloide. El grupo de isotropía (para $m > 0$) resulta ser $SO(3)$. En el caso $m=0$ el grupo de isotropía cambia a $SO(2)$. Esta es la razón detrás de la (sutil!) diferencia entre "espín" y "helicidad". Este ejemplo será discutido en gran detalle más adelante.

Grupos cíclicos.

G : grupo. Fijar $a \in G$. Entonces $H := \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de G .

Si $H = G$, decimos que G es un grupo cíclico, con generador a , y escribimos $G = \langle a \rangle$.

De la definición debe ser claro que todo grupo cíclico es abeliano ($a^n a^m = a^m a^n$).

Teorema. Sea $G = \langle a \rangle$ un grupo cíclico con generador a . Si H es un subgrupo de G ($H \leq G$), entonces H también es cíclico.

Demostración:

Como $G = \langle a \rangle$, todo elemento de G es de la forma a^n , para algún $n \in \mathbb{Z}$. En particular, los elementos de H son de esta forma. Lo que buscamos, entonces, es mostrar que H es generado por algún elemento $b \in H$, que necesariamente será de la forma $b = a^n$, para algún n (que por supuesto desconocemos). Sin embargo esto quiere decir que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid a^n \in H\}$ es no vacío. Sea entonces m el menor entero positivo tal que $a^m \in H$.

Afirmamos que $b := a^m$ genera a H ; es decir, que $H = \langle b \rangle$.

Debemos entonces mostrar que si $h \in H$, entonces h es alguna potencia de $b \rightarrow h = b^q$ ($q \in \mathbb{Z}$). ¿Cómo mostramos esto?

\rightarrow Como $h \in G$, entonces $h = a^{n_h}$, para algún $n_h \in \mathbb{Z}$.

Queremos mostrar que entonces se tendrá $a^{n_h} = b^q = a^{mq}$.

Pero esto es equivalente a tener $a^{n_h - mq} = e$. Como $a \neq e$ (a menos que G posea un solo elemento), lo que debemos mostrar es que n_h es divisible entre $m \rightarrow n_h = mq$.

Consideremos entonces el algoritmo de la división: dados n_h (del cual sabemos que está en \mathbb{Z} y que es tal que $a^{n_h} = h$) y $m \in \mathbb{N}$ (que sabemos existe y es el menor entero tal que $a^m \in H$), consideremos el cociente entre ellos: $\frac{n_h}{m} \in \mathbb{Q}$. Quisiéramos mostrar que en realidad se tiene $\frac{n_h}{m} \in \mathbb{Z}$. ¿Cómo hacemos esto?

\rightarrow Usando el "algoritmo de la división", que nos garantiza la existencia de enteros q y r tales que $n_h = mq + r$ y $0 \leq r < m$.

Ahora bien, tenemos que $a^{nh} \in H$ y $a^m \in H$. Así que también debemos tener $a^r \in H$, ya que $a^r = a^{nh-mq} = a^{nh}(a^{mq})^{-1}$.

Como $0 \leq r < m$, vemos que necesariamente debe ser $r=0$. En caso contrario tendríamos un entero positivo r menor que m , y tal que $a^r \in H$, que es una contradicción.

- \mathbb{Z} , como grupo aditivo, es un grupo cíclico, generado por 1

$$\rightarrow \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$$

Cada $n \in \mathbb{Z}$ genera un subgrupo $\langle n \rangle = n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

Por ejemplo, $3\mathbb{Z} = \{0, \pm 3, \pm 6, \dots\}$

→ Los subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$ son todos de esta forma.

- $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, con operación de suma, módulo n , es un grupo cíclico, de orden n .

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}. \text{ En } \mathbb{Z}_3 \text{ tenemos } 1+1=2, 1+1+1=3=0 \pmod{3}$$

Ejercicio 3.1 Mostrar que $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

↑ grupo cociente

→ Es un teorema que los anteriores son los únicos tipos de grupos cíclicos que existen.

Intuitivamente es claro que si G es cíclico e infinito $\rightarrow G \cong \mathbb{Z}$.

Así mismo, G cíclico y finito $\rightarrow G \cong \mathbb{Z}_n$ (algún $n \in \mathbb{N}$).

Ejemplo: Sea $n \in \mathbb{N}$. Tomar $a = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}^*$. $\rightarrow \mathbb{C}^*$ es un grupo, bajo multiplicación. Vemos que $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_n$. $\rightarrow a^n = 1$

Los subgrupos de orden finito de $SO(3)$.

Hemos mencionado que toda rotación se puede parametrizar en términos de un vector unitario \hat{r} y un ángulo de rotación φ :

$$G_{\varphi} \xrightarrow{\hat{r}} R(\hat{r}, \varphi) \in SO(3).$$

¿Cómo son los subgrupos finitos de $SO(3)$?

→ Hay una primera familia de subgrupos que es muy fácil de identificar:

$$G \xrightarrow{\hat{r} : \text{fijar } \hat{r}} \Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$$

$$\rightarrow a := R(\hat{r}, \Delta\varphi)$$

→ Podemos generar un grupo cíclico, ya que $a^n = 1$.

$$\rightarrow \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_n.$$

Notación usual para estos subgrupos → C_n

→ Hay infinitos de estos: por cada $\hat{r} \in S^2$, tenemos toda una familia \mathbb{Z}_n , $n = 2, 3, \dots$

Para un subgrupo de este tipo, de la forma $\langle a \rangle$, con $a = R(\hat{r}, \frac{2\pi}{n})$, notemos que si dejamos actuar $SO(3)$ en \mathbb{R}^3 de la manera natural, obtenemos, por restricción a la esfera unitaria, una acción

$$SO(3) \times S^2 \rightarrow S^2. \rightarrow \hat{r} \text{ y } -\hat{r} \in S^2 \text{ son puntos fijos de } a,$$

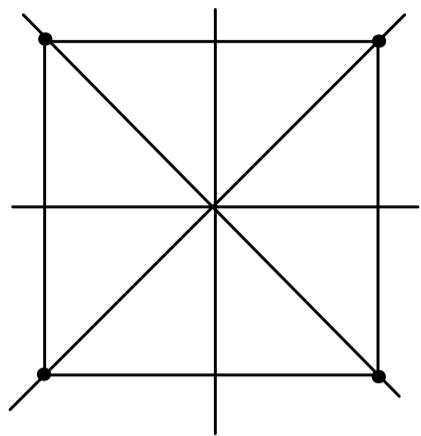
y por lo tanto de todo el grupo cíclico que este elemento genera: $\langle a \rangle$.

a mueve todos los puntos de la esfera, pero siempre deja fijos

$$\hat{r} \text{ y } -\hat{r}. \rightarrow G = \langle a \rangle, M = \{\hat{r}, -\hat{r}\} \rightarrow M \text{ es un } G\text{-espacio (aunque trivial)}$$

Podría ser que tuviéramos G -espacios más interesantes?

→ Recordemos el grupo octal, o diédrico, D_4 :



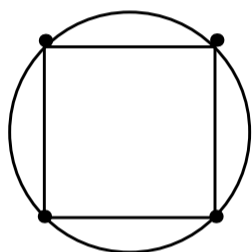
Simetrías:

* Rotaciones de $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ (4 en total)

→ \mathbb{Z}_4

* Además: reflexiones → alrededor de 4 ejes

Podemos imaginar los 4 vértices del cuadrado sobre la superficie de una esfera. Para esto, primero inscribimos el cuadrado en una circunferencia:



Ahora tomamos dicha circunferencia como "el ecuador" de una esfera →

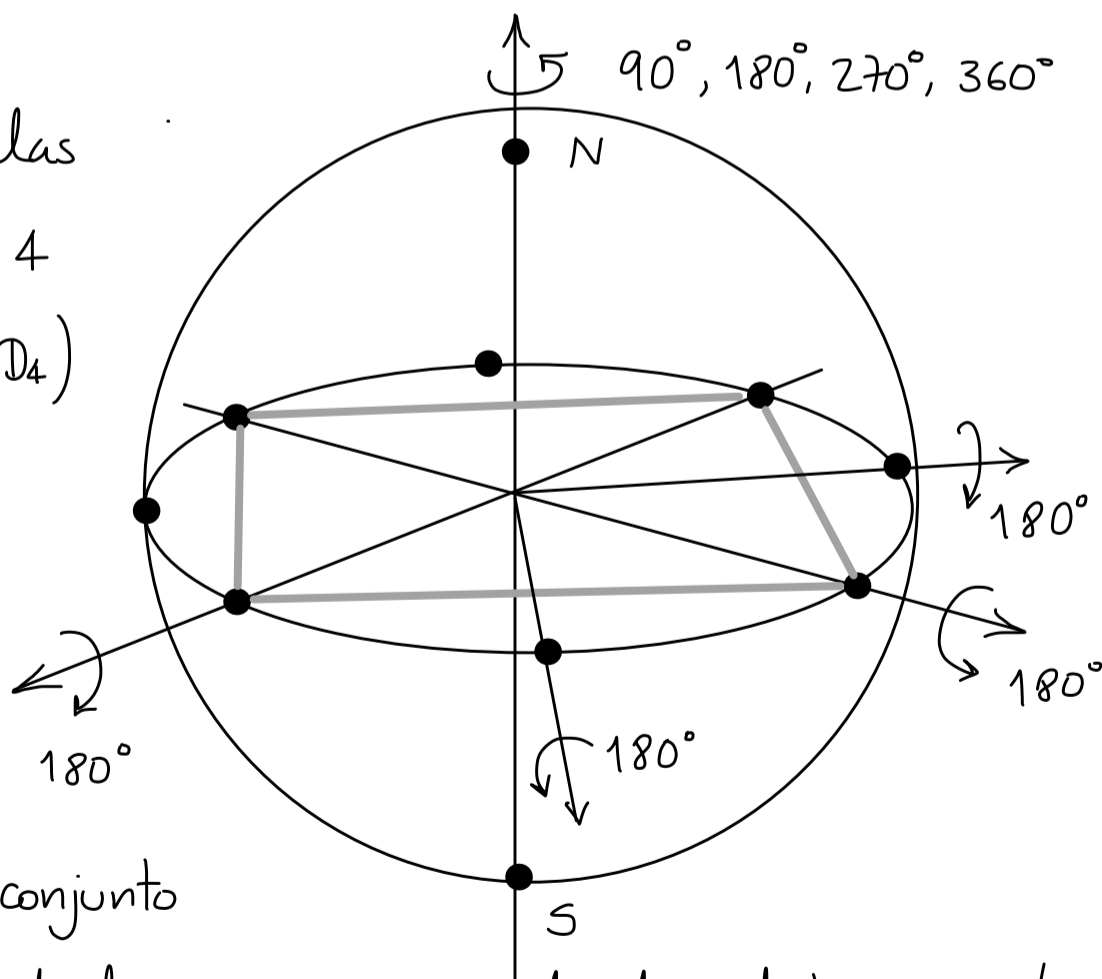
De la figura es claro que las 4 rotaciones, así como las 4 reflexiones (que dan lugar a D_4)

se pueden implementar por medio de rotaciones en \mathbb{R}^3 .

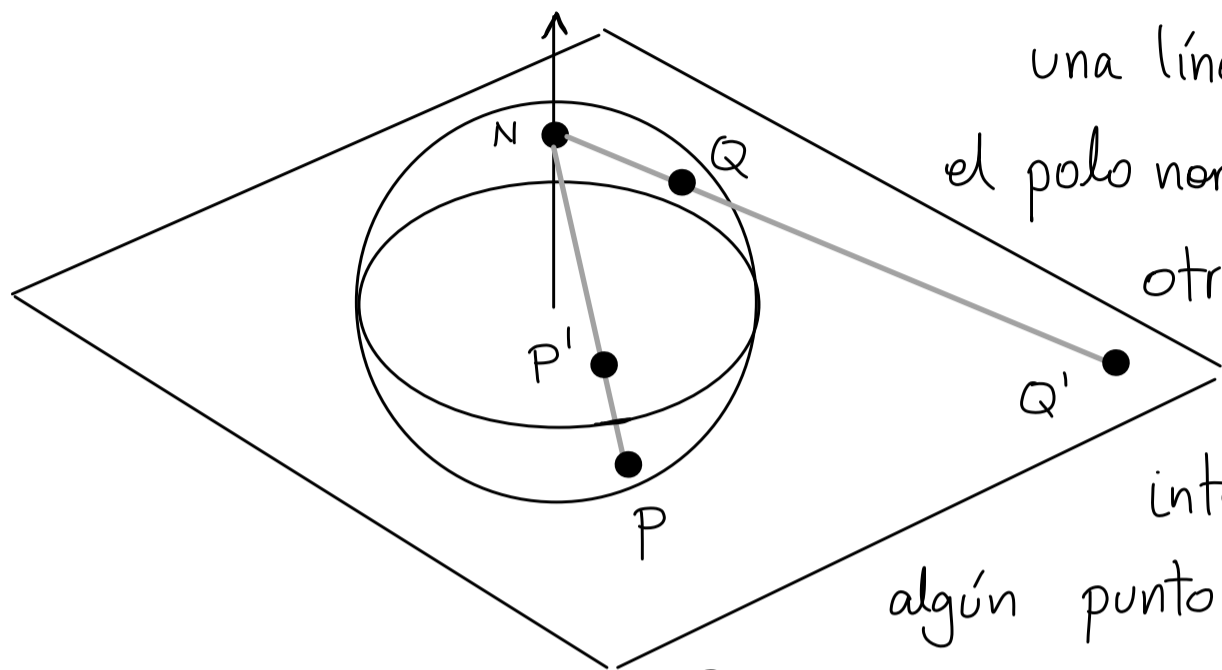
Los puntos indicados sobre la superficie

(10 en total) forman un G -conjunto

para D_4 : bajo la acción de las operaciones indicadas, dicho conjunto permanece invariante (aunque los puntos son permutados entre sí).



Una forma conveniente de representar un conjunto de puntos que se encuentran sobre la superficie de una esfera es a través de la proyección estereográfica:



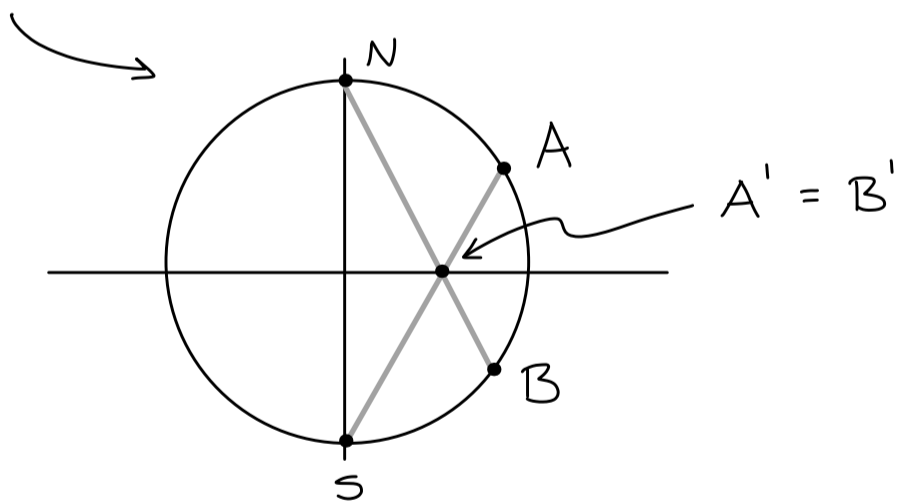
Nótese que al trazar una línea recta que pase por el polo norte "N" y por cualquier otro punto de la esfera, dicha recta deberá intersectar el plano en algún punto. En el caso del punto

P, que según el gráfico se encuentra en el hemisferio inferior de la esfera, la intersección con el plano ocurre en el punto P', que se encuentra en el interior del disco cuya frontera es el ecuador de la esfera. Para el punto Q, que se encuentra en el hemisferio superior, la situación es distinta, ya que la recta correspondiente intersecta el plano en el punto Q', que está en la parte exterior al disco.

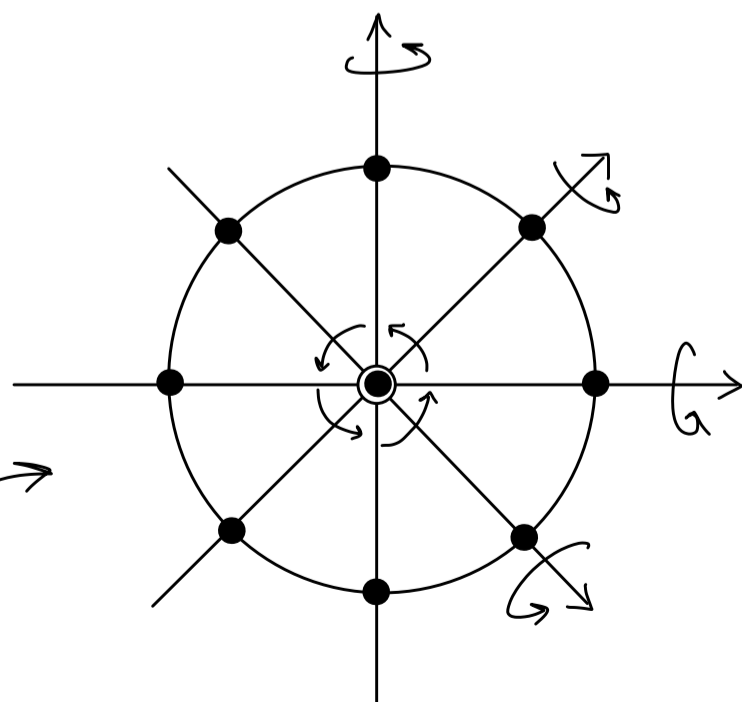
El punto P' es la proyección estereográfica del punto P (respecto al polo norte N). Así mismo, el punto Q' es la proyección estereográfica de Q (resp. a N). Nótese también que si escogemos proyectar todos los puntos del hemisferio inferior respecto al polo norte "N" y todos los puntos del hemisferio superior

respecto al polo sur "S", lograremos que todas las proyecciones caigan en el interior del disco. Para evitar ambigüedades, podemos establecer la convención de que si un punto dentro del disco fue obtenido por proyección desde el polo norte, usaremos un "punto relleno": "•". Si, por el contrario, un punto dado fue obtenido por proyección desde el polo sur, usaremos un círculo "○". En caso de tener dos puntos, proyectados desde "N" y "S" respectivamente y tales que sus proyecciones coincidan, escribimos "⊙". Este sería el caso, por ejemplo, de la representación de los polos norte y sur.

Otro caso lo ilustra la siguiente figura, que muestra un corte transversal, donde las proyecciones de A y B (respecto a polos opuestos, por supuesto) coinciden: $A' = B'$

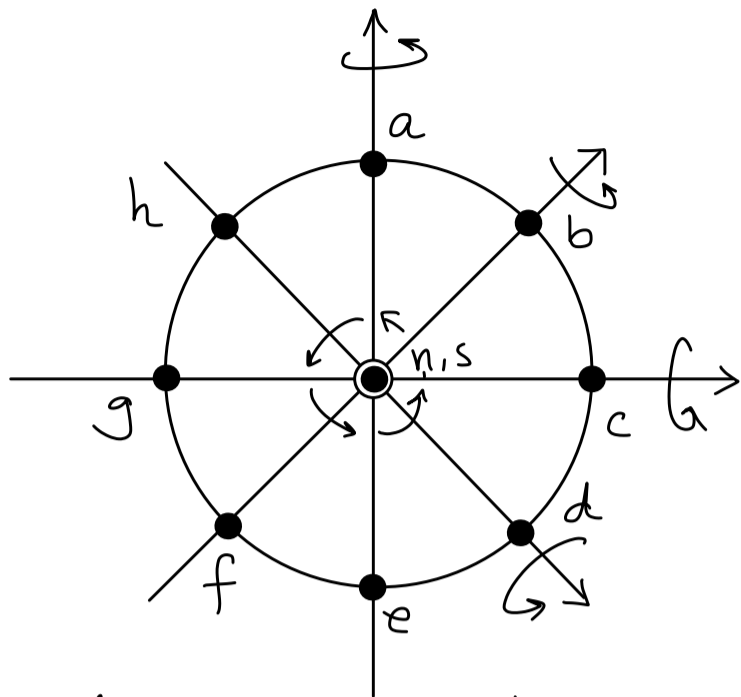


Con esta convención, obtenemos la siguiente representación del conjunto de 10 puntos sobre la esfera de la página anterior



Representemos ahora estos 10 puntos mediante letras

"a, b, c, d, e, f, g, h, n, s":



Está claro que bajo la acción de las simetrías en D_4 , implementadas aquí como subgrupo (finito) de $SO(3)$, el conjunto $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, n, s\}$ es un G -conjunto.

Este conjunto se puede partir en órbitas (respecto a la acción de D_4) que, como es fácil verificar, son las siguientes:

$$\mathcal{O}_1 = \{a, c, e, g\} \rightarrow \text{multiplicidad} \rightarrow n_1 = 2 \quad (180^\circ + 180^\circ = 360^\circ)$$

$$\mathcal{O}_2 = \{f, d, b, h\} \rightarrow \text{multiplicidad} \rightarrow n_2 = 2$$

$$\mathcal{O}_3 = \{n, s\} \rightarrow \text{multiplicidad} \rightarrow n_3 = 4 \quad (90^\circ \times 4 = 360^\circ)$$

total de órbitas $\equiv K = 3$

$$\rightarrow M = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 \quad (\text{unión disyunta}).$$

Obsérvese ahora que

$$\sum_{i=1}^K \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 2 - \frac{1}{4}$$

$$= 2 - \frac{2}{8} = 2 - \frac{2}{|D_4|}$$

→ Caso particular de una ecuación diofantina:

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 - \frac{2}{|G|} \quad (*)$$

(para $G < SO(3)$, subgrupo finito)

→ Estudiando esta ecuación, se pueden clasificar todos los subgrupos finitos de $SO(3)$ (Tarea!)

El mismo tipo de análisis que hemos realizado con D_4 puede ser realizado con cualquiera de los grupos diédricos $D_n^{(+)}$.

→ Así que hasta ahora hemos detectado 2 familias de subgrupos finitos de $SO(3)$: C_n y D_n (con $n=2,3,4,\dots$)

Como veremos, existen otras 3 clases, que coinciden con los grupos de simetría del

- tetraedro (T) → $|G| = 12$
- hexaedro/cubo (C) → $|G| = 24$
- icosaedro (I) → $|G| = 60$

Pareciera que hacen falta 2 de los 5 sólidos platónicos. Esto se debe a una relación de dualidad que hace que el grupo de simetrías de un cubo sea el mismo que el de un octaedro, y que el de un dodecaedro sea el mismo que el de un icosaedro.

(+): En algunas referencias se usa la notación D_{2n} en lugar de D_n .

La clasificación de los subgrupos finitos de $SO(3)$ (es decir, la demostración de que las afirmaciones anteriores son verdaderas) la llevaremos a cabo en una de las tareas.

Volvamos ahora sobre un hecho del que hemos estado haciendo uso todo este tiempo, y es que toda rotación es de la forma $R(\hat{r}, \varphi)$; es decir, que toda rotación es una rotación en un cierto ángulo " φ " alrededor de cierto eje (definido por un vector unitario " \hat{r} "):

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \text{ (producto interior Euclideo)}$$

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} \mapsto A\vec{x} \quad \text{transf. lineal.}$$

Definición de transpuesta: $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t \vec{y} \rangle \Leftrightarrow (A^t)_{ij} = A_{ji}$

- Grupo ortogonal en dimensión n :

$$O(n) := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = \mathbb{1}_n \} \rightarrow A^t = A^{-1}$$

- Grupo ortogonal especial en dimensión n :

$$SO(n) := \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$$

$$A \in O(n) \Rightarrow |\det A|^2 = 1.$$

Caso de interés: $n = 3$. Queremos mostrar que todo elemento de $SO(3)$ es de la forma $R(\hat{r}, \varphi)$.

Para ver que esto es así:

Buscamos, para $A \in SO(3)$, soluciones a $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

(\rightarrow direcciones fijas)

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (\lambda\mathbb{1}_3 - A)\vec{x} = 0$$

$$\vec{x} \neq 0 \text{ requiere } \det(\lambda\mathbb{1}_3 - A) = 0.$$

Polinomio característico: $P(\lambda) := \det(\lambda\mathbb{1}_3 - A)$

$\lambda \mapsto P(\lambda)$ es una función continua!

$$P(0) = \det(-A) = -\det A = -1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P(\lambda) = \infty$$

\uparrow $n=3$ \uparrow $A \in SO(3)$

$$\Rightarrow \exists \lambda_0 \in (0, \infty) \text{ t.q. } P(\lambda_0) = 0.$$

Como $A \in SO(3)$, debemos tener $|\lambda_0| = 1$, ya que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$$\Rightarrow \langle A\vec{x}, A\vec{x} \rangle = \lambda^2 \|\vec{x}\|^2 \Rightarrow \lambda^2 = 1.$$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2$$

\rightarrow Como $\lambda_0 > 0$, debemos tener $\lambda_0 = 1$.

(nótese también que el caso $\lambda = -1$ no es admisible, porque corresponde a una reflexión).

Conclusión: existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ t.q. $A\vec{x} = \vec{x}$.

\rightarrow A representa una rotación alrededor del eje determinado

$$\text{por } \hat{r} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}.$$

¿No hay más soluciones? \rightarrow NO

Veamos:

Sea $X_A = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{v} = \vec{v}\}$. Acabamos de mostrar que

$\dim X_A > 0$. ¿Cómo sabemos que, en realidad, se tiene $\dim X_A = 1$?

Suponer $\dim X_A = 2$ ($\dim X_A = 3$ implicaría $A = \text{id}$!)

Consideremos X_A^\perp . Está claro que X_A^\perp debe quedar invariante bajo la acción de $A \rightarrow \mathbb{R}^3 = X_A \oplus X_A^\perp$

Pero entonces tenemos

$$A\vec{v} = \vec{v}, \text{ si } \vec{v} \in X_A \text{ y } A\vec{w} = \pm\vec{w}, \text{ si } \vec{w} \in X_A^\perp.$$

$$A\vec{w} = +\vec{w} \Rightarrow A = \text{id} \text{ (no nos interesa este caso)}$$

$$A\vec{w} = -\vec{w} \Rightarrow \det A = -1 \rightarrow \text{contradicción}$$

Conclusión: $\dim X_A = 1$.

↪ En una base adecuada (p. ej. hacer que \hat{r} sea el eje z) la matriz de A tomará la forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A = R(\hat{r}, \varphi)$$

→ todas las rotaciones son de esta forma!

