§2. Subgrupos, homomorfismos, etc.

La vez anterior finalizamos con la definición de grupo.
Ahora consideraremos algunas definiciones y ejemplos.

<u>Def.</u> Sea G un grupo. Si el conjunto subyacente al grupo es un conjunto finito, diremos que G es un <u>grupo finito</u>, y denotaremos con $\#G$, $|G|$ ó $o(G)$ el número de elementos del grupo.

$\searrow \#G \equiv |G| \equiv o(G) :=$ órden del grupo.

<u>Def.</u> (Grupo abeliano). Sea G un grupo. Si para todo par de elementos $a, b \in G$ se cumple $ab = ba$, diremos que el producto es conmutativo o, de manera equivalente, que el grupo es <u>abeliano.</u>

<u>Def.</u> (Homomorfismo, Isomorfismo). Sean G, H dos grupos.
Un mapa $\phi : G \longrightarrow H$ con la propiedad

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \quad \forall x, y \in G, \qquad (1)$$

se denomina <u>homomorfismo</u> de grupos.

Si $\phi : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo que a la vez es biyectivo (i.e. inyectivo + sobreyectivo), decimos que ϕ es un <u>isomorfismo</u> y escribimos $G \cong H$.

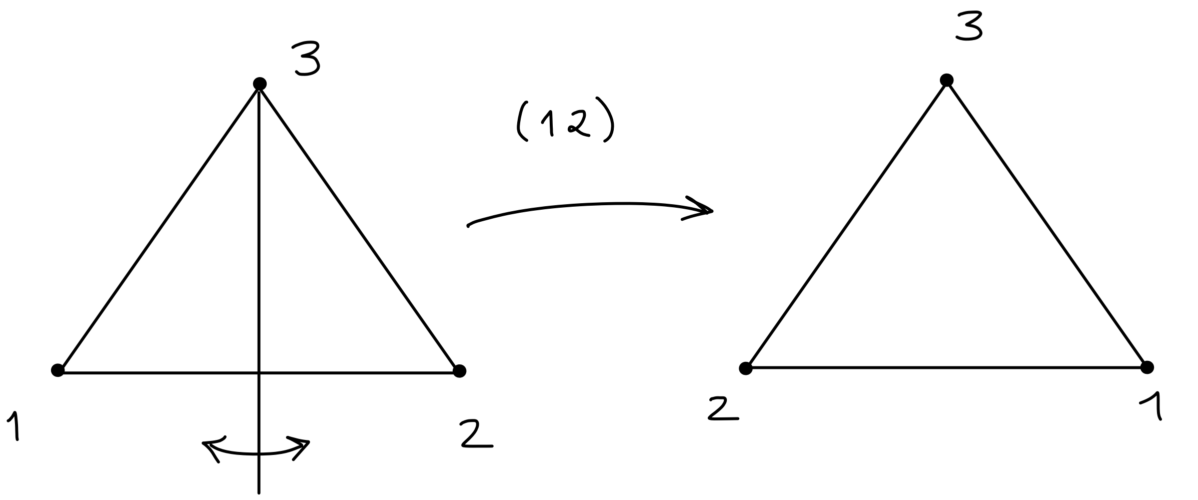
<u>Def.</u> (Subgrupo) G: grupo. Si $K \subseteq G$ es cerrado bajo la operación de grupo en G (y bajo inversos), decimos que K es un <u>subgrupo</u> de G y escribimos $K \leqslant G$.

Con la operación heredada de G, K es en sí mismo un grupo.
Otra forma decirlo es:

$K \subseteq G$ es subgrupo $\quad \leftrightarrow \quad x, y \in K \Rightarrow xy^{-1} \in K$ y $x^{-1} \in K$.

Volvamos al ejemplo del grupo de simetrías del triángulo equilátero. En total hay 6 operaciones de simetría:

* <u>Reflexiones.</u>

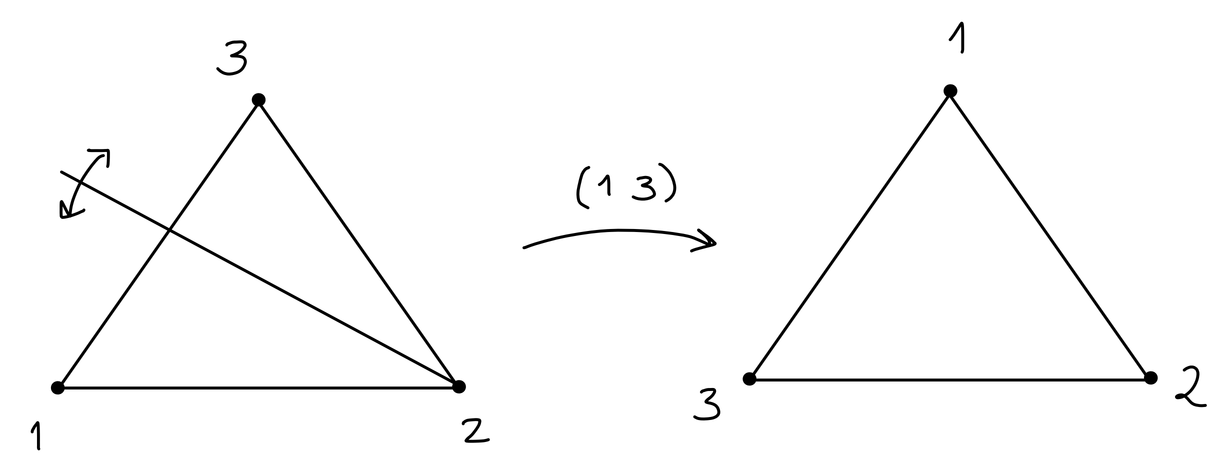


reflexión respecto a este eje.

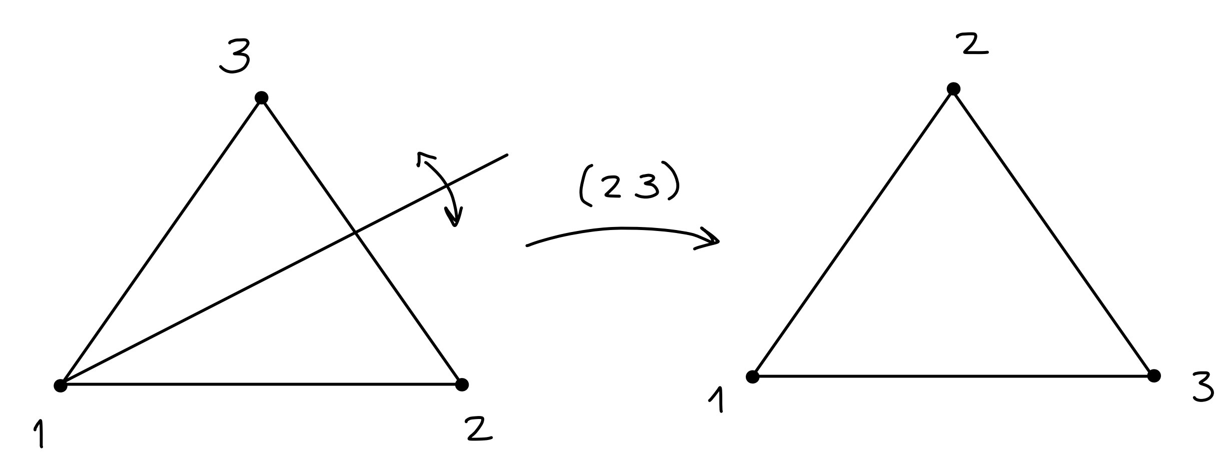
Notación:

$$\boxed{(12) \equiv \sigma_3}$$

"intercambiar 1 con 2"



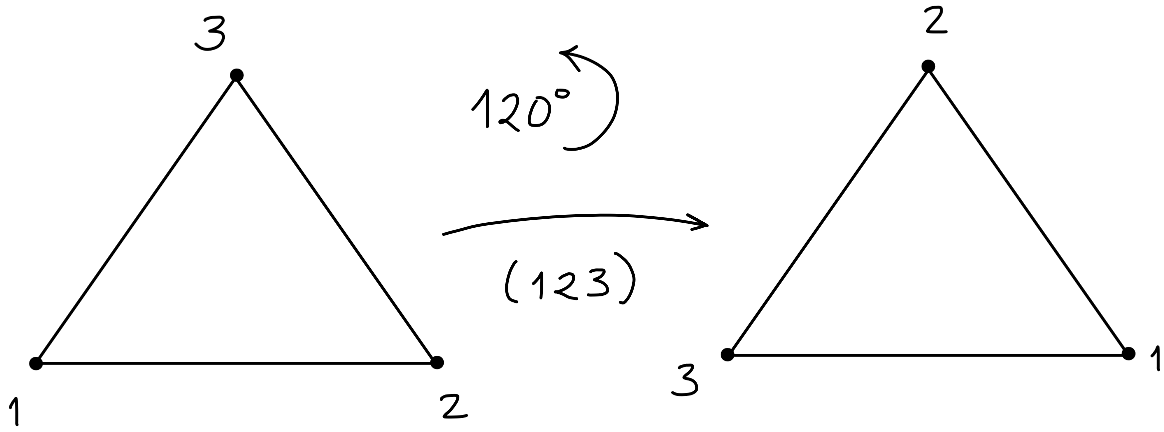
$$\boxed{(13) \equiv \sigma_2}$$



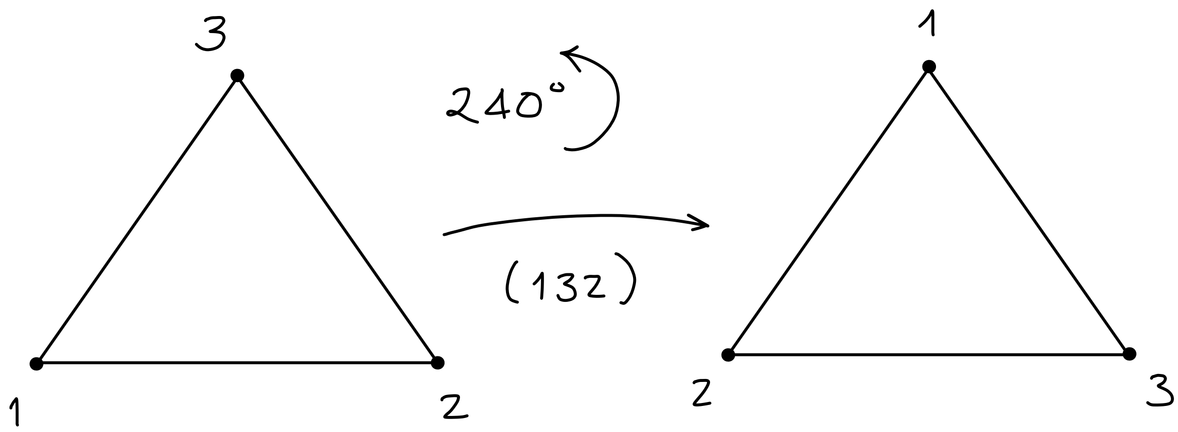
$$\boxed{(23) \equiv \sigma_1}$$

* Rotaciones

Rotación en 120° (sentido opuesto a las manecillas del reloj).



$\boxed{(123) \equiv \tau}$



$\boxed{(132) \equiv \rho}$

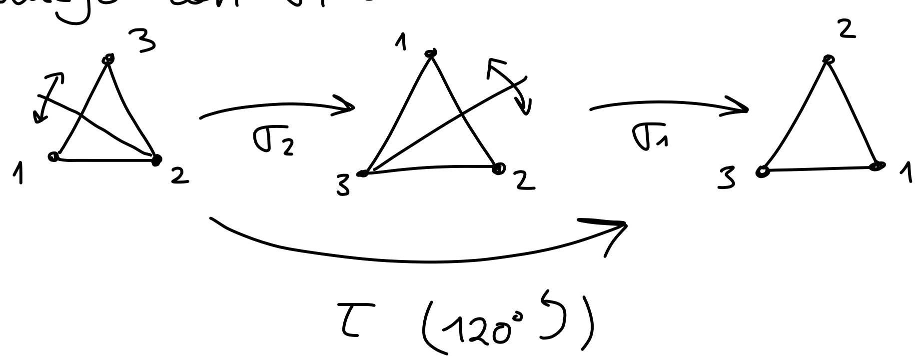
$\{1, 2, 3\} \overset{\rho}{\longmapsto} \{3, 2, 1\}$ (ρ entendido como una permutación).

Dejamos como ejercicio verificar que la tabla de multiplicación que se obtiene es la siguiente:

	e	σ_1	σ_2	σ_3	τ	ρ
e	e	σ_1	σ_2	σ_3	τ	ρ
σ_1	σ_1	e	τ	ρ	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	ρ	e	τ	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	τ	ρ	e	σ_1	σ_2
τ	τ	σ_3	σ_1	σ_2	ρ	e
ρ	ρ	σ_2	σ_3	σ_1	e	τ

Algunas observaciones:

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = e \longrightarrow$ esto es claro, ya que se trata de reflexiones.
- Respecto al orden en el que efectuamos las operaciones. Por la forma en que hemos definido este grupo, queremos pensar en "σ_1" como un elemento del grupo de simetrías que opera/actúa sobre un conjunto. Así que al escribir "$\sigma_1\sigma_2$", en lo que estamos pensando es en la composición de los mapas respectivos $\longrightarrow$ primero operamos con σ_2 y luego con σ_1:



$$\Longrightarrow \sigma_1\sigma_2 = \tau$$

Representando estas operaciones como permutaciones:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \sigma_2 \\ \downarrow \sigma_1 \end{matrix} \Big\} \; \sigma_1 \circ \sigma_2 = \tau$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv (312)$$

- Notemos que $\sigma_2\sigma_1 = \rho \neq \tau$ (permutación cíclica)

  $\hookrightarrow$ este grupo <u>no</u> es abeliano!

- $\tau^2 = \rho \iff 120° + 120° = 240°$, $\quad \rho^2 = \tau \iff 240° + 240° = 480° = 120° \ (\text{mod } 360)$

  $\tau\rho = \rho\tau = e \longrightarrow \tau = \rho^{-1}$

$\hookrightarrow \{e, \tau, \rho\}$ <u>es</u> un subgrupo de $S_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho, \tau\}$

Tabla de mult. para este subgrupo es $\longrightarrow$

	e	τ	ρ
e	e	τ	ρ
τ	τ	ρ	e
ρ	ρ	e	τ

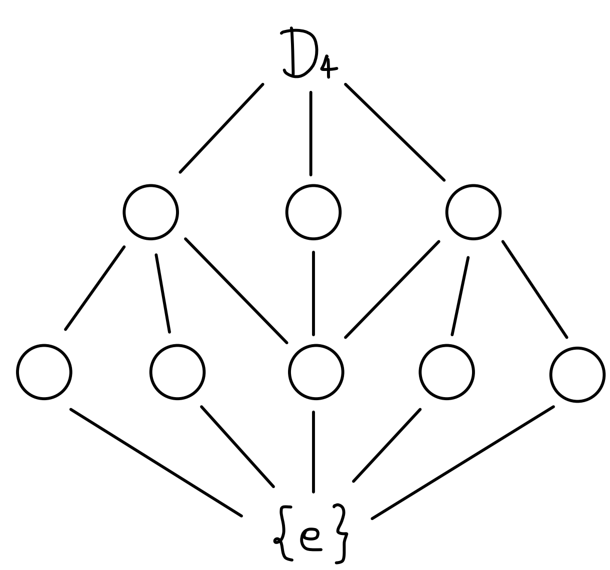
- Con el siguiente "diagrama reticular" podemos representar gráficamente todos los subgrupos de S_3 y las relaciones entre ellos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \{e,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\tau,\rho\} \arrow[dlll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drrr, dash] & & & \\
\{e,\tau,\rho\} \arrow[drrr, dash] & & \{e,\sigma_1\} \arrow[dr, dash] & & \{e,\sigma_2\} \arrow[dl, dash] & & \{e,\sigma_3\} \arrow[dlll, dash] \\
 & & & \{e\} & & &
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 1

Consideremos el grupo de simetrías de un cuadrado, conocido como grupo octal, o grupo diédrico D_4.

- ¿Cuál es el orden de dicho grupo? R/ $|D_4| = 8$
- Obtenga la tabla de multiplicación de dicho grupo.
- Encuentre todos los subgrupos de D_4 y construya el diagrama reticular. Ayuda: el diagrama resultante deberá tener la siguiente estructura:



—————————— // ——————————

Def. (Automorfismo) Un isomorfismo de G en sí mismo, se denomina automorfismo.

Notación: $\mathrm{Hom}(G,H) = \{\phi : G \longrightarrow H \mid \phi \text{ es homomorfismo}\}$

$\mathrm{Aut}(G) = \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ es isomorfismo}\}$

Ejercicio 2

Mostrar que $\mathrm{Aut}(G)$ tiene una estructura natural de grupo (a través de composición).

Ejemplo. G: grupo. $x \in G$.

Definir
$$i_x : G \longrightarrow G$$
$$g \longmapsto i_x(g) := xgx^{-1}.$$

Entonces, i_x es un automorfismo de G ($i_x \in \mathrm{Aut}(G)$), el <u>automorfismo interno</u> generado por x.

Veamos:

- i_x es homomorfismo: $i_x(gh) = x(gh)x^{-1} = xgehx^{-1} =$
$$= xgx^{-1}xhx^{-1}$$
$$= i_x(g)\, i_x(h)$$
- i_x es inyectiva: $i_x(g) = e \iff e = xgx^{-1} \Rightarrow x^{-1}ex = g \Rightarrow g = e.$
- i_x es sobreyectiva:

  Sea $h \in G$. Debemos encontrar $g \in G$ tal que $i_x(g) = h$.

  Tomar $g = x^{-1}hx$, se sigue que $i_x(g) = xgx^{-1} = x(x^{-1}hx)x^{-1} = h.$

Subgrupos normales.

Sea X un conjunto. Una relación R en X es un subconjunto de $X\times X \hookrightarrow R \subseteq X\times X$.

Si el par $(a,b)\in X\times X$ pertenece a dicho subconjunto, escribimos "$a\,R\,b$", o simplemente "$a\sim b$".

Decimos entonces que "a está relacionado con b".

Sea "$\sim$" una relación en X. Decimos que la relación es:

i) <u>Reflexiva</u>, si $a\sim a$

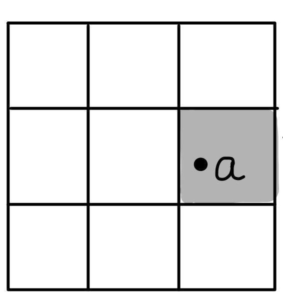
ii) <u>Simétrica</u>, si $a\sim b \Rightarrow b\sim a$.

iii) <u>Transitiva</u>, si $a\sim b$ y $b\sim c \Rightarrow a\sim c$.

Una relación que satisface i), ii) y iii) se denomina una <u>relación de equivalencia</u>.

$\rightarrow$ Hay una correspondencia 1-1 entre relaciones de equivalencia en X y particiones de X.

X



$\rightarrow [a] = \{x\in X \mid x\sim a\}$

"clase de equivalencia de a" $\equiv$ celda

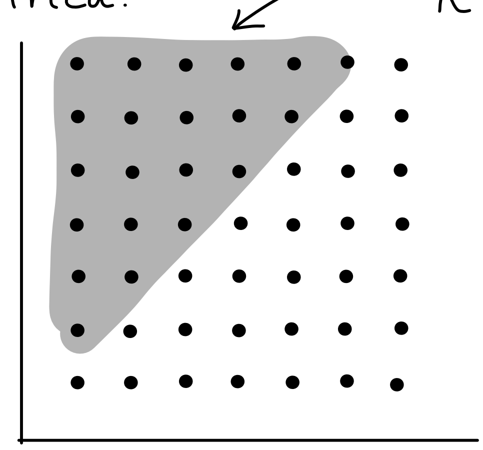
$\nwarrow$ partición de X en celdas / clases de equivalencia.

<u>Ejemplo.</u>

$(\mathbb{N}, <) \rightarrow$ Nótese que $n<m$ <u>no</u> implica $m<n$, luego la relación "ser menor que" no es simétrica.

"$R\subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$"

"$<$" vista como subconjunto de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:



Sea G un grupo, y H un subgrupo de G. Debido a la ley de cancelación, válida en todo grupo, podemos considerar los conjuntos

$$gH = \{ gh \mid h \in H \}$$

y mostrar lo siguiente:

Si definimos una relación de equivalencia de la siguiente forma,

$$g \sim g' \iff g^{-1} g' \in H \text{ (es decir, } g' = gh \text{, para algún } h \in H),$$

entonces tendremos que $g_1 \sim g_2 \Rightarrow g_1 H = g_2 H$.

Así mismo, si $g_1 \nsim g_2$, entonces $(g_1 H) \cap (g_2 H) = \phi$.

Esto es fácil de mostrar: supongamos que g_1 y g_2 son tales que no existe ningún elemento $h \in H$ tal que $g_1 = g_2 h$. En otras palabras, son tales que $g_2^{-1} g_1 \notin H$. Supongamos que $(g_1 H) \cap (g_2 H) \neq \phi$. Entonces existe $x \in G$ t.q. $x \in g_1 H$ y $x \in g_2 H$, es decir, existen $h_1, h_2 \in H$ tales que $x = g_1 h_1 = g_2 h_2$.

Pero entonces $g_2^{-1} g_1 = h_2 h_1^{-1} \in H$, contrario a la hipótesis.

↳ Podemos generar una partición de G en <u>celdas</u> determinadas por la relación de equivalencia → cada celda es una clase lateral, de la forma gH.

Formalizando un poco más lo anterior, tenemos:

<u>Def</u>. Si $H \leq G$, definimos la siguiente relación de equivalencia:

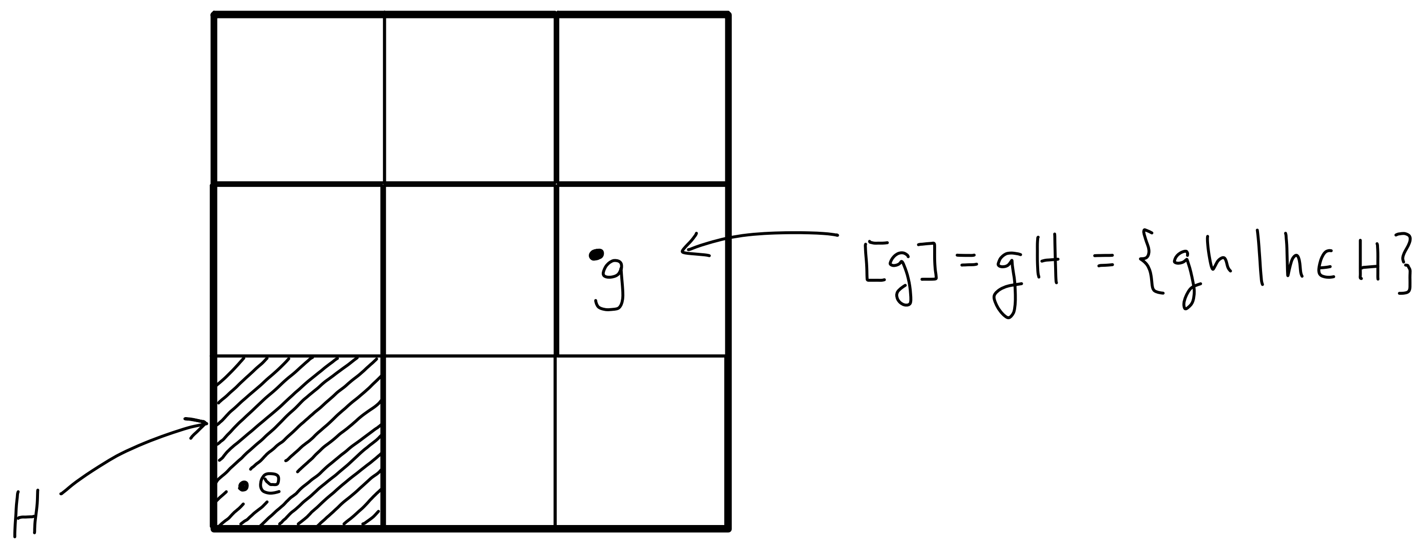
$$g_1 \sim g_2 \overset{(def)}{\iff} g_1^{-1} g_2 \in H.$$

Hay que asegurar, antes que nada, que esta es una "buena definición".

Es decir, debemos mostrar que "$\sim$" es reflexiva, simétrica y transitiva.

<u>Ejercicio 3</u> Mostrar que la relación "~" definida atrás es, en efecto, una relación de equivalencia.

De acuerdo a lo anterior, la partición de G inducida por un subgrupo H se puede representar gráficamente de la siguiente forma:



El conjunto G/H es el conjunto de clases de equivalencia $\{[g]\}_{g\in G}$
Los elementos de este conjuntos son las "celdas" de G.
Nos preguntamos entonces si será posible inducir una estructura de grupo en este conjunto de "clases de equivalencia".
La noción natural de producto en este conjunto es la siguiente:

$$G/H \times G/H \longrightarrow G/H$$
$$[g_1]\ ,\ [g_2] \longmapsto [g_1]\cdot[g_2] := [g_1 g_2]$$

Para que esta definición tenga sentido, es necesario poder garantizar que la clase $[g_1 g_2]$ <u>no</u> depende de los representantes g_1 y g_2.
Veamos: tomemos diferentes representantes $\rightarrow$ $g_1 \sim \bar{g}_1$, $g_2 \sim \bar{g}_2$.
↳ Se debería seguir que

$$g_1 g_2 \sim \bar{g}_1 \bar{g}_2 \qquad (*).$$

Pero lo que tenemos es $g_1 = \bar{g}_1 h$ (para algún $h \in H$) y $g_2 = \bar{g}_2 h'$ (algún $h' \in H$)

La relación (*) requiere $(g_1 g_2)^{-1}(\bar{g}_1 \bar{g}_2) \in H$.

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
(g_1 g_2)^{-1}(\bar{g}_1 \bar{g}_2) &= (\bar{g}_1 h \bar{g}_2 h')^{-1}(\bar{g}_1 \bar{g}_2) \\
&= (h')^{-1} \bar{g}_2^{-1} h^{-1} \underbrace{\bar{g}_1^{-1} \bar{g}_1}_{=e} \bar{g}_2 \\
&= (h')^{-1} \bar{g}_2^{-1} h^{-1} \bar{g}_2 \\
&\overset{(!)}{=} (h')^{-1} (h'' \bar{g}_2^{-1}) \bar{g}_2 = (h')^{-1} h'' \in H
\end{aligned}
$$

Esto será posible (algún $h'' \in H$)

si asumimos que, dados $g \in G$ y $h \in H$,
existe $\tilde{h} \in H$ tq $gh = \tilde{h} g$. Pero esto es lo mismo que tener $ghg^{-1} = \tilde{h}$.
En otras palabras, si $\forall g \in G$, $h \in H$, se cumple $ghg^{-1} \in H$, entonces (*) es válida.

En términos de automorfismos internos, esto es lo mismo que pedir
$i_g(H) \subseteq H$ $(\forall g \in G)$.

<u>Def.</u> Sean G un grupo y H un subgrupo de G, $H \leq G$. Si H es tal que $i_g(H) \subseteq H$ $\forall g \in G$, decimos que H es un subgrupo normal de G y escribimos

$$H \trianglelefteq G.$$

Según lo anterior, tenemos: $H \trianglelefteq G \Rightarrow G/H$ también es un grupo (el grupo cociente)