§1. El concepto de simetría.

Indudablemente, el concepto de "simetría" juega un papel fundamental en todas las áreas de la física.
Desde un punto de vista matemático, este concepto se puede capturar por medio de diversas estructuras, una de las cuales (la estructura de grupo) será el tema central de este curso.
Hay muchas más estructuras matemáticas ligadas al concepto de simetría. Entre ellas encontramos, por ejemplo:

- Acción de un grupo en un conjunto.
- Álgebras de Lie (que representan la idea de una transformación "infinitesimal" de simetría)
- Grupos de Lie, como prototipo de un grupo de transformaciones continuas.
- Teoría de representaciones (esta es, en particular, la forma como estudiamos simetrías en mecánica cuántica)

A medida que avanza nuestro conocimiento, van apareciendo nociones más generales (y así mismo más abstractas) del concepto de simetría. Es así como, por ejemplo, hoy en día sabemos que detrás de los complicados cálculos de renormalización en teoría cuántica de campos, en los que se hace uso de diagramas de Feynman, hay una estructura de "álgebra de Hopf", que de manera muy precisa corresponde a una generalización del concepto de grupo.

Es inevitable, por lo tanto, que como físicos nos veamos enfrentados a un lenguaje con cierto grado de sofisticación matemática. Esto por supuesto, si es que uno tiene el propósito de comprender -y eventualmente hacer uso de- las estructuras que subyacen toda teoría física, y que de manera muy general están relacionadas con principios de simetría(*).
En este curso intentaremos ir introduciendo los conceptos de forma gradual, de tal forma que las definiciones, proposiciones, teoremas, etc. (en lo posible) parezcan por lo menos "plausibles" y también de tal forma que las aplicaciones a situaciones concretas de relevancia en física se mantengan en el centro de la discusión.

Para ir entrando en materia, comencemos por recordar algunos aspectos de la dinámica Newtoniana.
En la física de Newton, los eventos físicos son "puntos" en un espacio afín que -una vez hemos escogido un sistema de referencia- podemos considerar como un espacio vectorial: "el espacio-tiempo".

$$\text{Evento} \longrightarrow (\vec{x}, t) \in \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{posición}} \times \overbrace{\mathbb{R}}^{\text{tiempo}}$$

Al hacer uso de coordenadas $(\vec{x}, t)$ estamos asumiendo que se ha escogido un sistema de referencia en el cual se cumplen las leyes

---

(*) Lo cual motiva la famosa expresión acerca de la "unreasonable effectiveness of mathematics in physics", debida a E. Wigner.

de Newton. Este debe ser, por lo tanto, un sistema de referencia inercial. Por definición (1era ley), en la física de Newton un sistema de referencia se denomina "inercial" si la trayectoria que sigue una partícula puntual que no está siendo afectada por ninguna fuerza es de la forma

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}\,t \qquad (1)$$

(movimiento rectilíneo uniforme).

Si sobre una partícula de masa "m" actúa una fuerza $\vec{F}$, entonces la trayectoria que seguirá la partícula será la solución a la siguiente ecuación diferencial (2da ley):

$$\vec{F}(\vec{x}(t)) = m\,\ddot{\vec{x}}(t). \qquad (2)$$

Como esta ecuación hace referencia a un marco específico, es de especial interés preguntarse: ¿en qué otros marcos de referencia podemos aplicar la misma ley? Como sabemos, cualquier otro sistema de referencia que se obtenga a partir del inicial a través de una rotación, una traslación en el tiempo o en el espacio, o una transformación de velocidad, será igualmente válido. Pasar a un sistema que esté acelerado con respecto al sistema original nos obligaría a hacer uso de las así llamadas "fuerzas ficticias", dado que la ec. (2) perdería su validez.

En otras palabras:

Si el sistema donde las coordenadas de un evento son $(\vec{x}, t)$ es un sistema inercial, entonces un sistema donde las coordenadas del mismo evento sean ($R \in SO(3)$: una rotación)

$$\begin{aligned} t' &= t + t_0 , \\ \vec{x}' &= \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + R\vec{x}, \end{aligned} \qquad (3)$$

también será un sistema inercial. Esto es así porque solamente aquellas transformaciones de coordenadas de la forma (3) dejarán la ecuación de movimiento, "$\vec{F} = m\vec{a}$", <u>invariante en forma</u>.

Pensemos, a manera de ejemplo, en una transformación que tenga la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ \vec{x}' &= A(t)\vec{x} + \vec{B}(t), \end{aligned} \qquad (4)$$

donde $A(t)$ es una matriz 3×3 dependiente de t, $\vec{B}(t)$ es un vector dependiente de t.

En este caso, la aceleración en el nuevo sistema de referencia será:

$$\vec{a}' = \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}' = \ddot{A}\vec{x} + A\ddot{\vec{x}} + 2\dot{A}\dot{\vec{x}} + \ddot{\vec{B}} .$$

Para mantener la forma de la ecuación de movimiento, debemos imponer las condiciones $\ddot{A} = \dot{A} = 0$, así como $\ddot{\vec{B}} = 0$. Es decir, A es una matriz constante, mientras que $\vec{B}(t)$ es de la forma $\vec{B}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t$.

$$\longrightarrow \vec{x}'(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + A\vec{x} .$$

Para poder expresar las coordenadas originales en términos de las nuevas (un requerimiento natural desde el punto de vista físico) es necesario que la matriz A sea <u>invertible</u>: $\det A \neq 0$. Así, el vector posición

$\vec{x}$ se transforma en $A\vec{x}$, al mismo tiempo que el vector fuerza $\vec{F}$ se transforma en $A\vec{F}$: la forma de la ec. de movimiento es la misma en ambos sistemas de referencia.

Un análisis más cuidadoso nos lleva rápidamente a la conclusión de que la matriz A debe corresponder a una matriz ortogonal (†).

Vemos entonces que una ecuación tan "sencilla" como $\vec{F} = m\vec{a}$ lleva consigo cierto tipo de simetría:

Dicha ecuación permanece invariante en forma bajo transformaciones de coordenadas de la forma (3). Estas corresponden a transformaciones entre sistemas inerciales.

Por simplicidad, a continuación vamos a considerar solo el caso $t' = t$.

¿Qué pasa entonces si consideramos 2 de estas transformaciones, aplicadas de forma consecutiva?

- $\underbrace{\text{Transformación}}_{\equiv T_1}$ 1, determinada por $\vec{x}_1, \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^3$, $R_1 \in SO(3)$:

$$\vec{x} \longmapsto \vec{x}\,' = \vec{x}_1 + \vec{v}_1 t + R_1 \vec{x}$$
$$t \longmapsto t' = t$$

- $\underbrace{\text{Transformación}}_{\equiv T_2}$ 2, determinada por $\vec{x}_2, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$, $R_2 \in SO(3)$:

$$\vec{x} \longmapsto \vec{x}\,' = \vec{x}_2 + \vec{v}_2 t + R_2 \vec{x}$$
$$t \longmapsto t' = t$$

(†) Ver, por ejemplo, "Relativity and Geometry", R. Torretti (Dover, '96)

Consideremos ahora las 2 transformaciones, aplicadas de forma consecutiva:

$$\vec{x} \xmapsto{T_2} \vec{x}\,' \xmapsto{T_1} \vec{x}\,'' \; : \; \vec{x}\,'' = T_1 \vec{x}\,' , \;\; \vec{x}\,' = T_2 \vec{x} , \;\; \vec{x}\,'' = T_1 \circ T_2 \vec{x}$$

Intuitivamente es claro que el resultado neto será una tercera transformación, "T_3", del mismo tipo: $\vec{x} \xmapsto{T_3} \vec{x}\,''$

T_3 está determinada por parámetros $\vec{x}_3, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ y $R_3 \in SO(3)$ que podemos calcular explícitamente:

$$\begin{aligned}
\vec{x}\,'' = T_1 \vec{x}\,' &= \vec{x}_1 + \vec{v}_1 t + R_1 \vec{x}\,' \\
&= \vec{x}_1 + v_1 t + R_1 (\vec{x}_2 + \vec{v}_2 t + R_2 \vec{x}) \\
&= \vec{x}_1 + \vec{v}_1 t + R_1 \vec{x}_2 + R_1 \vec{v}_2 t + R_1 R_2 \vec{x} \\
&= \underbrace{(\vec{x}_1 + R_1 \vec{x}_2)}_{\vec{x}_3} + \underbrace{(\vec{v}_1 + R_1 \vec{v}_2)}_{\vec{v}_3} t + \underbrace{(R_1 R_2)}_{R_3} \vec{x} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Notemos que la transformación T_3 sigue siendo de la forma (3) y representa, por lo tanto, una transformación a un nuevo marco inercial. A cada una de las "tuplas" de parámetros $(\vec{x}_i, \vec{v}_i, R_i)$ la podemos ver como un elemento del conjunto $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

Como la transformación T_i está completamente determinada por la tupla $(\vec{x}_i, \vec{v}_i, R_i)$, podemos escribir:

$$T_1 \circ T_2 = T_3 \quad \longleftrightarrow \quad (\vec{x}_1, \vec{v}_1, R_1) \circ (\vec{x}_2, \vec{v}_2, R_2) = (\vec{x}_3, \vec{v}_3, R_3).$$

La expresión de la derecha es tan solo una manera de representar la composición de las transformaciones T_1 y T_2, que en últimas no son otra cosa que transformaciones lineales.

Sin embargo, haciendo uso de (5) vemos que tiene sentido considerar la siguiente "regla de multiplicación":

$$(\vec{x}_1, \vec{v}_1, R_1) \circ (\vec{x}_2, \vec{v}_2, R_2) := (\vec{x}_1 + R_1 \vec{x}_2, \vec{v}_1 + R_1 \vec{v}_2, R_1 R_2) \qquad (6)$$

Ejercicio 1 Considere las transformaciones T (parametrizadas por tuplas $(\vec{x}, \vec{v}, R) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times SO(3)$) en el caso especial $\vec{x} = \vec{0}$, como tranformaciones lineales de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$.

(i) Escriba las matrices de dichas transformaciones

(ii) Calcule el producto de 2 de estas matrices y compárelo con la "regla" de multiplicación (6).

<u>Solución:</u>

Notemos ahora que la regla de transformación (6) ya no hace referencia al espacio de eventos (el espacio-tiempo).

De hecho, ahora podríamos simplemente considerar el conjunto

$$\mathcal{G} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times SO(3),$$

junto con la regla de multiplicación (6). Esta última se puede entender como un mapa ("producto")

$$P : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},$$

definido según (6):

$$P\big((\vec{x}_1, \vec{v}_1, R_1), (\vec{x}_2, \vec{v}_2, R_2)\big) := (\vec{x}_1 + R_1 \vec{x}_2, \vec{v}_1 + R_1 \vec{v}_2, R_1 R_2)$$

Para $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$, es conveniente usar la notación $\alpha \cdot \beta \equiv P(\alpha, \beta)$.

Si es claro por el contexto, incluso será conveniente escribir simplemente "$\alpha\beta$" (sin punto).

Está claro que hay un elemento, $e = (\vec{0}, \vec{0}, \mathbb{1}_3)$, que actúa como la "identidad", en el siguiente sentido:

- Para todo $\alpha \in \mathcal{G}$, se cumple $\alpha \cdot e = e \cdot \alpha = \alpha$.

También es fácil verificar que, dado $\alpha \in \mathcal{G}$, existe un "inverso multiplicativo", llamémoslo $\tilde{\alpha}$, tal que $\alpha \cdot \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} \cdot \alpha = e$.

En efecto, sea $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{v}_0, R) \in \mathcal{G} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

Para averiguar cuál es el inverso de α, escribamos $\tilde{\alpha} = (\vec{a}, \vec{b}, \tilde{R})$ y veamos qué implicación tiene exigir que se cumpla $\alpha \cdot \tilde{\alpha} = e$:

$$(\vec{x}_0, \vec{v}_0, R) \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \tilde{R}) = (\vec{x}_0 + R\vec{a}, \vec{v}_0 + R\vec{b}, R\tilde{R}) \overset{!}{=} (\vec{0}, \vec{0}, \mathbb{1}_3)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\vec{x}_0 + R\vec{a} = \vec{0}, \quad R\tilde{R} = \mathbb{1}_3 \\ &\vec{v}_0 + R\vec{b} = \vec{0}, \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} = -R^{-1}\vec{x}_0, \quad \vec{b} = -R^{-1}\vec{v}_0, \quad \tilde{R} = R^{-1}$$

$\to \quad \tilde{\alpha} = (-R^{-1}\vec{x}_0, -R^{-1}\vec{v}_0, R^{-1})$.

Como veremos, el inverso de un elemento α dado es único.

Es usual denotar el inverso de α como α^{-1} (en lugar de $\tilde{\alpha}$).

Otra propiedad que cumple la regla de multiplicación (6) es la asociatividad: Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{G}$, se cumple que $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

Dejaremos como un ejercicio sencillo verificar dicha propiedad.

—————— // ——————

El ejemplo anterior tenía como objetivo ilustrar el concepto de "simetría" en la forma como usualmente surge en física, esto es, a través de un conjunto de transformaciones que preservan alguna estructura relevante de una teoría. En este caso, se trataba de transformaciones afines que preservan la forma de las ecuaciones de la dinámica newtoniana o, de forma equivalente, que transforman marcos de referencia inerciales entre sí. Dichas transformaciones, al ser aplicadas de manera consecutiva, resultan obedeciendo unas "reglas de multiplicación".

Lo anterior da lugar a la definición matemática de grupo.

Definición Un grupo G es un conjunto, junto con dos mapas $P: G\times G \longrightarrow G$ (el producto) y $I: G \longrightarrow G$ (el inverso) que, haciendo uso de la notación $P(g,h) \equiv gh$ y $I(g) \equiv g^{-1}$, satisfacen los siguientes axiomas:

(i) Asociatividad: $(xy)z = x(yz)$, para todo $x, y, z \in G$.

(ii) Identidad: existe un elemento $e \in G$, tal que $ge = eg = g$, $\forall g \in G$.

(iii) Inverso: Para todo $g \in G$ se cumple $gg^{-1} = e = g^{-1}g$.

Aunque el estudio que llevaremos a cabo en este curso será, en general, a través de ejemplos y cálculos concretos, es natural (desde el punto de vista matemático) considerar los grupos como estructuras abstractas, para las cuales es posible establecer resultados de un alto grado de generalidad. Así pues, veremos que hacer preguntas generales acerca de la "clase" de aquellos grupos que son finitos, nos permitirá avanzar muchos kilómetros, casi sin darnos cuenta. La teoría general de representaciones de grupos finitos podrá luego ser aplicada, sin mayor dificultad (conceptual, más no técnica!) al caso de grupos como el grupo de permutaciones.

Como ilustración de este principio, veamos cómo se sigue directamente de la definición que la identidad en un grupo es única.

$\longrightarrow$ Por definición, la identidad de un grupo G es un elemento $e \in G$ tal que tal que $ge = eg = e \quad \forall g \in G$.

Supongamos que existe otro elemento $\tilde{e} \in G$ con las misma propiedad.

Pero entonces debemos tener:

e es identidad $\Rightarrow \quad \tilde{e}e = e\tilde{e} = e \quad$ (ya que $\tilde{e} \in G$)

$\tilde{e}$ es identidad $\Rightarrow \quad \tilde{e}e = e\tilde{e} = \tilde{e} \quad$ (ya que $e \in G$)

Se sigue que $e = e\tilde{e} = \tilde{e}$, es decir, la identidad es única.

<u>Ejercicio 2</u>: Usando la definición de grupo, mostrar que el inverso de un elemento $g \in G$ es siempre único.

• **Solución ejercicio 1:**

$$T \text{ "="} (\vec{x}_0, \vec{v}_0, R)$$

$$\vec{x}' = \vec{x}_0 + t\vec{v}_0 + R\vec{x} \quad , \quad \vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$$

$$t' = t$$

R es una matriz 3×3.

$$\begin{pmatrix} t' \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_0^1 & & & \\ v_0^2 & & \boxed{R} & \\ v_0^3 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{pmatrix}} \to \vec{0}$$

(para el caso especial que estamos considerando)

Una notación conveniente es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} t \\ |\vec{x}\rangle \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 & \langle\vec{0}| \\ \hline |\vec{v}_0\rangle & R \end{array}\right) \begin{pmatrix} t \\ |\vec{x}\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ |\vec{x}_0\rangle \end{pmatrix}$$

→ Para $\vec{x}_0 = 0$, la transformación es una transf. lineal, cuya matriz es $\left(\begin{array}{c|c} 1 & \langle\vec{0}| \\ \hline |\vec{v}_0\rangle & R \end{array}\right)$

El producto de 2 de estas matrices está dado por:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \langle\vec{0}| \\ \hline |\vec{v}_1\rangle & R_1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \langle\vec{0}| \\ \hline |\vec{v}_2\rangle & R_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \langle\vec{0}|\vec{v}_2\rangle \\ \hline |\vec{v}_1\rangle + R_1|\vec{v}_2\rangle & R_1 R_2 \end{array}\right)$$

, que coincide con (6) para el caso $\vec{x}_i = 0$.

• **Solución ejercicio 2:**

Inverso es único → Suponer que dado $g \in G$, hay 2 inversos: g^{-1} y $\tilde{g}^{-1}$. Entonces se tiene:

$$g g^{-1} = e \Rightarrow \underbrace{\tilde{g}^{-1}(g g^{-1})}_{=} = \underbrace{\tilde{g}^{-1} e}_{=}$$

asociatividad → $(\tilde{g}^{-1} g) g^{-1}$; $\tilde{g}^{-1}$ ← def de "e".

[Asumiendo que $\tilde{g}^{-1}$ es inverso] → e

$$\Rightarrow (\tilde{g}^{-1} g) g^{-1} = \tilde{g}^{-1}$$

$$\rightarrow e g^{-1} = \tilde{g}^{-1}$$

$$\rightarrow g^{-1} = \tilde{g}^{-1}.$$