1. En dos dimensiones espacio-temporales (una de tiempo y una de espacio), las transformaciones de Lorentz "puras" (*boosts*) se pueden expresar por medio de matrices 2×2, de la siguiente forma:

$$L(u) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma u \\ \gamma u & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} u^2 \end{pmatrix},$$

donde se entiende que $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2}$ (para este ejercicio, asuma $c \equiv 1$). Muestre que la composición de dos *boosts* es de nuevo un *boost*. Es decir, si u y v representan dos velocidades (en una dimensión espacial), encuentre aquella velocidad w tal que $L(u)L(v) = L(w)$. ¿Cambia el resultado si se invierte el orden de u y v? Considere ahora cuatro dimensiones espacio-temporales. Si $\vec{u}$ es el vector que determina un *boost*, siguiendo Scheck (Mechanics, cap. 4) vemos que es conveniente expresar la transformación de Lorentz correspondiente de la siguiente forma:

$$L(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \langle \vec{v}| \\ \gamma |\vec{v}\rangle & \mathbb{1}_{3\times 3} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} |\vec{v}\rangle\langle\vec{v}| \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Muestre que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores paralelos (ó antiparalelos), entonces $L(\vec{u})L(\vec{v})$ es de nuevo un *boost*. Encuentre la regla de adición de velocidades para este caso. ¿Qué sucede en el caso en que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no necesariamente sean paralelos/antiparalelos?

2. La ecuación (1) ha sido escrita en *unidades naturales*, para las cuales se tiene $c = 1$. Sustituyendo $\vec{v}$ por $\vec{v}/c$ se puede obtener la expresión general para $L(\vec{v})$, incluyendo factores dimensionales. Teniendo en cuenta que para la componente temporal de un 4-vector se tiene $x^0 = ct$, y para las espaciales $(x^1, x^2, x^3) = \vec{x}$, muestre que, en el límite en que $c \to \infty$ (ó, de forma físicamente equivalente, en el límite de bajas velocidades), la transformación $L(v)$ toma la forma de una transformación de Galileo.

3. Muestre que el conjunto $\mathcal{P} := \{(\Lambda, a) \mid \Lambda \in L_+^\uparrow, a \in \mathbb{R}^4\}$, dotado de la operación de "multiplicación"

$$(\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a')$$

da lugar a una estructura de grupo (*el grupo de Poincaré*).

4. Muestre, usando el teorema de Noether, que la densidad de probabilidad

$$\rho(x) = \mid \psi(x) \mid^2,$$

para $\psi(x)$ una función de onda de Schrödinger, satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0,$$

donde $\vec{j}$ es la *corriente de probabilidad* $\vec{j} = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right)$.

5. Considere la ecuación de Klein-Gordon (ecuación (10.1) en las notas). Usando el teorema de Noether, encuentre una ecuación de continuidad de la forma $\partial_\mu j^\mu = 0$. Explique por qué esto nos obliga a descartar una interpretación de la ecuación en términos de funciones de onda.

6. Considere un campo escalar real $\varphi(x)$, solución real de la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0. \tag{2}$$

Como hemos visto en clase, esta ecuación se puede obtener a partir del siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2.$$

6.1 Asumiremos (de forma correcta) que cualquier solución real de la ecuación (3) se puede escribir en la forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4p e^{ipx} \delta(p^2 - m^2) a(k).$$

Verifique que la expresión anterior es, en efecto, solución de (3).
Definiendo $E_p := +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, muestre que toda solución de (3) se puede escribir como $\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x)$, donde

$$\varphi^\pm(x) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}} e^{\pm ipx} a^\pm(\vec{p}), \qquad \text{y} \qquad a^\pm(\vec{p}) := \frac{a(\pm E_p, \pm\vec{p})}{\sqrt{2E_p}}.$$

6.2 Muestre que $a^\pm(\vec{p})$ es proporcional a

$$\int d^3x e^{\mp ipx} \left(E_p \varphi(x) \mp i\dot{\varphi}(x)\right).$$

Encuentre el valor de la constante de proporcionalidad. Esta expresión para $a^\pm(\vec{p})$ contiene una dependencia implícita de t. Muestre explícitamente, derivando respecto a t, que $a^\pm(\vec{p})$ no depende del tiempo.

7. Sea $\varphi : M \to \mathbb{K}$ (M: espacio de Minkowski, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) un campo *escalar*, solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a una densidad Lagrangiana que depende solamente del campo y de sus primeras derivadas:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \tag{3}$$

Como es bien sabido, las leyes de conservación de energía y de momento son consecuencia de la homogeneidad del espacio-tiempo. Dicha homogeneidad se puede imponer en una teoría de campos exigiendo que la acción sea invariante bajo traslaciones $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$. Esto implica que la variación $\delta\mathcal{L}$ del Lagrangiano debe ser, a lo sumo, un término de la forma $\partial_\mu J^\mu$ (¿por qué?). Asumiendo que $\mathcal{L}$ es de la forma (3) y que φ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, muestre que $\delta\mathcal{L}$ es, en efecto, de la forma $\partial_\mu J^\mu$ (exprese J^μ en términos de $\delta\varphi$). Calcule ahora, usando una aproximación de Taylor, las variaciones $\delta\varphi$ y $\delta\mathcal{L}$, para el caso específico $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$. Comparando las dos expresiones obtenidas para $\delta\mathcal{L}$, concluya que el tensor de energía-momento, definido como

$$T_{\mu\nu} := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\mathcal{L},$$

satisface la ecuación de continuidad

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0. \tag{4}$$

8. Asumiendo relaciones de conmutación canónicas a tiempos iguales para el campo de Klein-Gordon real, de la forma (todos los demás conmutadores iguales a cero):

$$[\varphi(x), \pi(y)]\Big|_{x^0=y^0} = i\delta(\vec{x}-\vec{y}),$$

obtenga relaciones para los (ahora operadores!) $a^{\pm}(\vec{p})$.

9. La densidad Lagrangiana para el campo de Klein-Gordon real está definida como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2).$$

Partiendo de esta densidad, calcule el momento canónico conjugado (π) y el tensor de energía-momento. Use su resultado para mostrar que la densidad de energía de este campo está dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{H}(\varphi,\pi) = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2).$$

Considere ahora el operador cuántico de energía, H. Reemplazando en la expresión clásica, y usando las relaciones de conmutación de los campos, muestre que si F es un polinomio en los campos cuánticos Φ y Π, entonces se tiene:

$$[H, F] = -i\partial_0 F.$$

10. Muestre explícitamente que el campo de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0,$$

es covariante bajo transformaciones de Lorentz.

Fecha de entrega: viernes 11 de septiembre, en clase.