14. Considere un sistema bosónico con operadores a_j, $a_j^\dagger$ que satisfacen reglas de conmutación de la forma

$$[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{k,l}, \quad [a_k, a_l] = 0 = [a_k^\dagger, a_l^\dagger]. \tag{1}$$

Sea A el operador definido como

$$A := a_{j_1} a_{j_2}^\dagger a_{j_3} a_{j_4}^\dagger a_{j_5}^\dagger,$$

donde $j_1, \ldots, j_5$ son índices fijos, pero de otro modo arbitrarios.

• (1 punto) *Haciendo uso de las relaciones de conmutación (1), reescriba el operador A en la forma*

$$A = {:}A{:} + B,$$

donde ": :" *representa orden normal.*

Consideremos ahora operadores de la forma $\mathcal{O} = \sum_k (\alpha_k a_k^\dagger + \beta_k a_k)$, es decir, operadores que sean combinaciones lineales de operadores de creación ($a_j^\dagger$) y destrucción (a_j). Para un conjunto de n de estos operadores, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_n$, tenemos el siguiente resultado, que facilita enormemente el cálculo de funciones de correlación:

<u>Teorema de Wick:</u>

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\cdots\mathcal{O}_n &= {:}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\cdots\mathcal{O}_n{:} + \sum_{i<j}\langle 0|\mathcal{O}_i\mathcal{O}_j|0\rangle\, {:}\mathcal{O}_1\cdots\breve{\mathcal{O}}_i\cdots\breve{\mathcal{O}}_j\cdots\mathcal{O}_n{:}\\ &+ \sum_{\substack{i_1<j_1\\ i_2<j_2}}\langle 0|\mathcal{O}_{i_1}\mathcal{O}_{j_1}|0\rangle\langle 0|\mathcal{O}_{i_2}\mathcal{O}_{j_2}|0\rangle\, {:}\mathcal{O}_1\cdots\breve{\mathcal{O}}_{i_1}\cdots\breve{\mathcal{O}}_{j_1}\cdots\breve{\mathcal{O}}_{i_2}\cdots\breve{\mathcal{O}}_{j_2}\cdots\mathcal{O}_n{:}\\ &+ \cdots \text{(todos los pares de contracciones).}\end{aligned}$$

El símbolo "$\breve{\mathcal{O}}_i$" indica que el término "$\mathcal{O}_i$" <u>debe ser omitido</u>. Así mismo es usual hacer uso de la siguiente notación:

$$: A\overbrace{BCD}E : \;\equiv\; \langle 0|BD|0\rangle : A\breve{B}C\breve{D}E : \;\equiv\; \langle 0|BD|0\rangle : ACE :, \text{etc..}$$

En este caso, hablamos de la "contracción" de B con D. Tenemos entonces, por ejemplo, que

$$\overbrace{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2} = \langle 0|\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2|0\rangle.$$

Así mismo, según la afirmación del teorema de Wick, debemos tener

$$\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3 = {:}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3{:} + {:}\overbrace{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2}\mathcal{O}_3{:} + {:}\mathcal{O}_1\overbrace{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3}{:} + {:}\overbrace{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3}{:}$$

• (1 punto) *Vuelva a obtener la descomposición del operador A del punto anterior en la forma ${:}A{:} + B$, pero esta vez usando el teorema de Wick enunciado arriba.*

Un caso especial del teorema de Wick es aquel en el que el producto que consideramos es de la forma

$${:}A_1\cdots A_k{:}{:}\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n{:}{:}B_1\ldots B_l{:},$$

donde los A_i, B_j son igualmente combinaciones lineales de operadores de creación y destrucción. En este caso, el teorema de Wick aplica "casi" de la misma forma que para el producto

$$A_1\cdots A_k\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_n B_1\ldots B_l,$$

con la diferencia de que **no** se deben tener en cuenta contracciones al interior de cada uno de los grupos $\{A_i\}_i$, $\{\mathcal{O}_j\}_j$, $\{B_k\}_k$; esto debiéndose al hecho de que cada grupo viene ya en orden normal (para ver que esto es cierto es útil considerar un par de ejemplos sencillos).

- (1 punto) *Verifique la afirmación anterior para el siguiente caso:*

$$:\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2::A_1A_2: ,$$

con $\mathcal{O}_1 = a_k$, $\mathcal{O}_2 = a_l^\dagger + a_l$, $A_1 = a_i$, $A_2 = a_j^\dagger$.

El teorema de Wick se generaliza a productos de operadores temporalmente ordenados, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
T(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\cdots\mathcal{O}_n) \;&=\; :\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\cdots\mathcal{O}_n: + \sum_{i<j}\langle 0|T(\mathcal{O}_i\mathcal{O}_j)|0\rangle :\mathcal{O}_1\cdots\breve{\mathcal{O}}_i\cdots\breve{\mathcal{O}}_j\cdots\mathcal{O}_n: \\
&+ \sum_{\substack{i_1<j_1\\ i_2<j_2}}\langle 0|T(\mathcal{O}_{i_1}\mathcal{O}_{j_1})|0\rangle\langle 0|T(\mathcal{O}_{i_2}\mathcal{O}_{j_2})|0\rangle :\mathcal{O}_1\cdots\breve{\mathcal{O}}_{i_1}\cdots\breve{\mathcal{O}}_{j_1}\cdots\breve{\mathcal{O}}_{i_2}\cdots\breve{\mathcal{O}}_{j_2}\cdots\mathcal{O}_n: \\
&+ \cdots \text{(todos los pares de contracciones temporalment ordenadas).}
\end{aligned}$$

Para esta versión del teorema, es usual hacer uso del mismo símbolo de contracción definido arriba, pero queriendo indicar que ahora se trata del valor esperado en el vacío de un producto temporalmente ordenado:

$$AB \equiv \langle 0|T(AB)|0\rangle.$$

Cabe anotar que, tanto en este caso, como en el caso anterior, la suma se realiza sobre *todas* las posibles contracciones. Es decir, términos como $ABCD$ y $ABCD$ deben ser incluídos!

15. En este ejercicio haremos uso de las convenciones usadas en clase para el campo escalar real, donde la expansión en modos toma la forma

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{2E_p}\left(f_p(x)a_p + f_p^*(x)a_p^\dagger\right),$$

con $f_p(x)$ una onda plana solución de la ecuación de KG, con normalización dada por

$$f_p(x) = \left.\frac{e^{-ip\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}}\right|_{p^0=E_p},$$

y donde las relaciones de conmutación son de tipo covariante, es decir vale que

$$[a_p, a_q^\dagger] = 2E_p\delta(q-p), \quad \text{etc.}$$

El *propagador de Feynman* se define como el siguiente producto temporalmente ordenado:

$$\Delta_F(x-y) := \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle.$$

- (1 punto) *Muestre que* $\Delta_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ik\cdot(x-y)}(k^2-m^2+i\varepsilon)^{-1}$.

Recordemos ahora la serie de Dyson:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_n T(H_I(t_1)\cdots H_I(t_n)).$$

Estamos interesados en obtener expresiones para algunos elementos matriciales de S, de la forma $S_{if} = \langle i|S|f\rangle$, a orden bajo en teoría de perturbaciones ($n = 1, 2$). Para esto vamos a considerar una interacción de la forma "$\lambda\varphi^4$". Esto quiere decir que al Lagrangiano $\mathcal{L}_0$ del campo escalar libre le añadimos un témino de (auto-)interacción $\mathcal{L}_I$, que será de la forma $\mathcal{L}_I = -\lambda\varphi^4$. Con esto, tendremos una densidad Hamiltoniana de la forma $\mathcal{H}_I = \lambda\varphi^4$. El Hamiltoniano de interacción es entonces igual a

$$H_I = \int d^3x \mathcal{H}_I(x).$$

Al cuantizar el campo, damos por entendido que $\mathcal{H}_I$ está en orden normal. Es decir, en realidad tomaremos

$$\mathcal{H}_I = \lambda :\varphi^4: \ .$$

Vamos a considerar un proceso de scattering de la forma $A + B \to C + D$, donde las 4 partículas (las 2 incidentes y las 2 dispersadas) tienen la misma masa m. Para las partículas incidentes tomaremos valores de energía-momento iguales a p_A, p_B y para las partículas dispersadas valores q_C y q_D. De esta forma, consideramos los siguientes estados:

- Estado inicial: $|\text{in}\rangle = a^\dagger_{p_A} a^\dagger_{p_B}|0\rangle$,
- Estado final: $|\text{out}\rangle = a^\dagger_{q_C} a^\dagger_{q_D}|0\rangle$.

Escribiendo $S = \mathbb{1} + R$, buscamos calcular $\langle \text{in}|R|\text{out}\rangle$. A orden 1 en teoría de perturbaciones (serie de Dyson), tenemos

$$S^{(1)} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \lambda :\varphi(x)^4: = -i\lambda \int d^4x :\varphi(x)^4: \ .$$

• (1 punto) *Calcule el elemento matricial* $\langle \text{in}|S^{(1)}|\text{out}\rangle$ *y déjelo expresado en términos de los momentos externos.*

Fecha y forma de entrega: **martes 1ero de noviembre, en clase**.