7. Muestre, usando el teorema de Noether, que la densidad de probabilidad

$$\rho(x) = \mid \psi(x) \mid^2,$$

para $\psi(x)$ una función de onda de Schrödinger, satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0,$$

donde $\vec{j}$ es la *corriente de probabilidad* $\vec{j} = \frac{-i\hbar}{2m} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right)$.

8. Considere la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0.$$

Usando el teorema de Noether, encuentre una ecuación de continuidad de la forma $\partial_\mu j^\mu = 0$. Explique por qué esto nos obliga a descartar una interpretación de la ecuación en términos de funciones de onda.

9. Considere un campo escalar real $\varphi(x)$, solución real de la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0. \tag{1}$$

Como hemos visto en clase, esta ecuación se puede obtener a partir del siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2.$$

(a) Asumiremos (de forma correcta) que cualquier solución real de la ecuación (1) se puede escribir en la forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 p e^{ipx} \delta(p^2 - m^2) a(k).$$

Verifique que la expresión anterior es, en efecto, solución de (1).
Definiendo $E_p := +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, muestre que toda solución de (1) se puede escribir como $\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x)$, donde

$$\varphi^\pm(x) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2E_p}} e^{\pm ipx} a^\pm(\vec{p}), \qquad \text{y} \qquad a^\pm(\vec{p}) := \frac{a(\pm E_p, \pm \vec{p})}{\sqrt{2E_p}}.$$

(b) Muestre que $a^\pm(\vec{p})$ es proporcional a

$$\int d^3 x e^{\mp ipx} \left(E_p \varphi(x) \mp i \dot{\varphi}(x) \right).$$

Encuentre el valor de la constante de proporcionalidad. Esta expresión para $a^\pm(\vec{p})$ contiene una dependencia implícita de t. Muestre explícitamente, derivando respecto a t, que $a^\pm(\vec{p})$ no depende del tiempo.

Fecha y forma de entrega: martes 13 de septiembre, en clase.