4. Muestre que el conjunto $\mathcal{P} := \{(\Lambda, a) \mid \Lambda \in L_+^\uparrow, a \in \mathbb{R}^4\}$, dotado de la operación de "multiplicación"

$$(\Lambda', a')(\Lambda, a) := (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a'), \tag{1}$$

da lugar a una estructura de grupo (*el grupo de Poincaré*). ¿Es posible representar las transformaciones de Poincaré como elementos de un grupo matricial, de tal forma que el producto (1) sea implementado por la multiplicación de matrices? Justifique su respuesta.

5. (a) Para el ejemplo del triángulo equilátero discutido en clase, asigne nombres a cada una de las operaciones del grupo de simetrías G (rotaciones y reflexiones, son 6 en total) y obtenga la "tabla de multiplicar" para el grupo de simetrías. Asigne ahora los números 1, 2, 3 a los vértices del triángulo, y muestre que tiene sentido representar cada una de las operaciones de simetría como una permutación de los tres elementos $\{1, 2, 3\}$. Verifique (en un par de casos) que la composición de dos elementos de G corresponde a la composición de las respectivas permutaciones. Lo anterior evidencia que hay un *isomorfismo* entre el grupo G y el grupo de permutaciones de tres letras, ó grupo simétrico, S_3.

(b) Basándose en el numeral anterior, construya una representación del grupo S_3 a través de matrices 2×2 con entradas reales. Esto es, una aplicación

$$\begin{aligned} \phi : S_3 &\rightarrow \mathrm{Gl}(2, \mathbb{R}) \\ \sigma &\mapsto \phi(\sigma), \end{aligned}$$

tal que $\phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma)\phi(\tau)$. Haga lo mismo, pero ahora con matrices 3×3 (ayuda: visualice el triángulo del problema anterior como aquel cuyos vértices se encuentran ubicados en los puntos $(1, 0, 0); (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ en el espacio Euclídeo).

(c) Para la representación con matrices 3×3 del numeral anterior, encuentre una base para $\mathbb{R}^3$ en la cual las matrices de representación sean *diagonales por bloques*. Esto refleja el hecho de que dicha representación en una *representación reducible* de S_3.

6. Obtenga la forma matricial para la regla de transformación de un vector bajo rotaciones,

$$\vec{x}' = (1 - \cos\varphi)(\hat{\varphi} \cdot \vec{x})\hat{\varphi} + (\cos\varphi)\vec{x} - (\sin\varphi)\hat{\varphi} \times \vec{x},$$

de la siguiente forma:

- Encuentre matrices M y N tales que

$$\begin{aligned} (\hat{\varphi} \cdot \vec{x})\hat{\varphi} - \vec{x} &= M\vec{x} \\ \hat{\varphi} \times \vec{x} &= N\vec{x}. \end{aligned}$$

- Muestre que $M = N^2$. Calcule N^2 y N^3. ¿Cuál es la expresión general para N^k?
- Muestre que $\vec{x}' = e^{-\varphi N}\vec{x}$ y que $\varphi N = \vec{\varphi} \cdot \vec{J}$.

Fecha y forma de entrega: lunes 29 de agosto, hasta las 2pm, en mi casillero.