1. En dos dimensiones espacio-temporales (una de tiempo y una de espacio), las transformaciones de Lorentz "puras" (*boosts*) se pueden expresar por medio de matrices 2×2, de la siguiente forma:

$$L(u) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma u \\ \gamma u & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} u^2 \end{pmatrix},$$

donde se entiende que $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2}$ (para este ejercicio, asuma $c \equiv 1$). Muestre que la composición de dos *boosts* es de nuevo un *boost*. Es decir, si u y v representan dos velocidades (en una dimensión espacial), encuentre aquella velocidad w tal que $L(u)L(v) = L(w)$. ¿Cambia el resultado si se invierte el orden de u y v? Considere ahora cuatro dimensiones espacio-temporales. Si $\vec{u}$ es el vector que determina un *boost*, siguiendo Scheck (Mechanics, cap. 4) vemos que es conveniente expresar la transformación de Lorentz correspondiente de la siguiente forma:

$$L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \langle \vec{v} | \\ \gamma | \vec{v} \rangle & \mathbb{1}_{3\times 3} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} | \vec{v} \rangle \langle \vec{v} | \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Muestre que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores paralelos (ó antiparalelos), entonces $L(\vec{u})L(\vec{v})$ es de nuevo un *boost*. Encuentre la regla de adición de velocidades para este caso. ¿Qué sucede en el caso en que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no necesariamente sean paralelos/antiparalelos?

2. La expresión (1) del ejercicio anterior para una transformación de Lorentz pura, ha sido escrita en *unidades naturales* (para las cuales se tiene $c = 1$). Sustituyendo $\vec{v}$ por $\vec{v}/c$ se puede obtener la expresión general para $L(\vec{v})$, incluyendo factores dimensionales. Teniendo en cuenta que para la componente temporal de un 4-vector se tiene $x^0 = ct$, y para las espaciales $(x^1, x^2, x^3) = \vec{x}$, muestre que, en el límite en que $c \to \infty$ (o de forma equivalente, en el límite de bajas velocidades), la transformación $L(v)$ toma la forma de una transformación de Galileo.

3. Considere una partícula A que se encuentra en reposo, y que tiene masa m_A. Dicha partícula decae en otras dos partículas B y C, cuyas masas en reposo son, respectivamente, m_B y m_C. Encuentre las energías de las partículas B y C luego del decaimiento. Calcule $\|\vec{p}_B\|$ y $\|\vec{p}_C\|$. ¿Qué sucede si $m_A < m_B + m_C$?

Fecha de entrega: jueves 18 de agosto, en clase.