Transformada de Legendre.

Tenemos una función cóncava/convexa (i.e. $f''(x) \neq 0$) y queremos codificar la información de esta función ($x \longmapsto f(x)$) en términos de una nueva función ($z \longmapsto \varphi(z)$), donde z "corresponde" a $f'(x)$. Es decir, en $x \longmapsto f(x)$, x es la variable independiente y f toma valores según variamos x. Lo que queremos hacer ahora es considerar a $f'(x)$ como la variable independiente. Si llamamos a esta nueva variable z (i.e. $z = f'(x)$), entonces buscamos una nueva función, $z \longmapsto \varphi(z)$, que contenga la misma información que $x \longmapsto f(x)$.

Por lo pronto, nuestra tarea consiste en lo siguiente:

Dados x y $f(x)$, (i) definir $z = f'(x)$ y (ii) encontrar/definir $\varphi(z)$.

Para que no haya pérdida de información, requerimos que la relación $z = f'(x)$ sea invertible.

Notemos que en $z = f'(x)$, z es una función <u>explícita</u> de x: dado x, "introducimos" x en f' y obtenemos z.

Con x sucede lo contrario:

Si fijamos z y nos preguntamos qué x corresponde a este z en la ecuación $z = f'(x)$, nos damos cuenta que no podemos "despejar" x en términos de z (a menos que f' sea invertible y conozcamos esta inversa de forma explícita). Expresemos, por lo tanto, la relación entre z y x de la siguiente forma:

$$\boxed{z = f'(x)} \quad (*) \quad \Longleftrightarrow \quad z - f'(x) = 0.$$

Definir una función

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto F(x_1, x_2) := x_2 - f'(x_1).$$

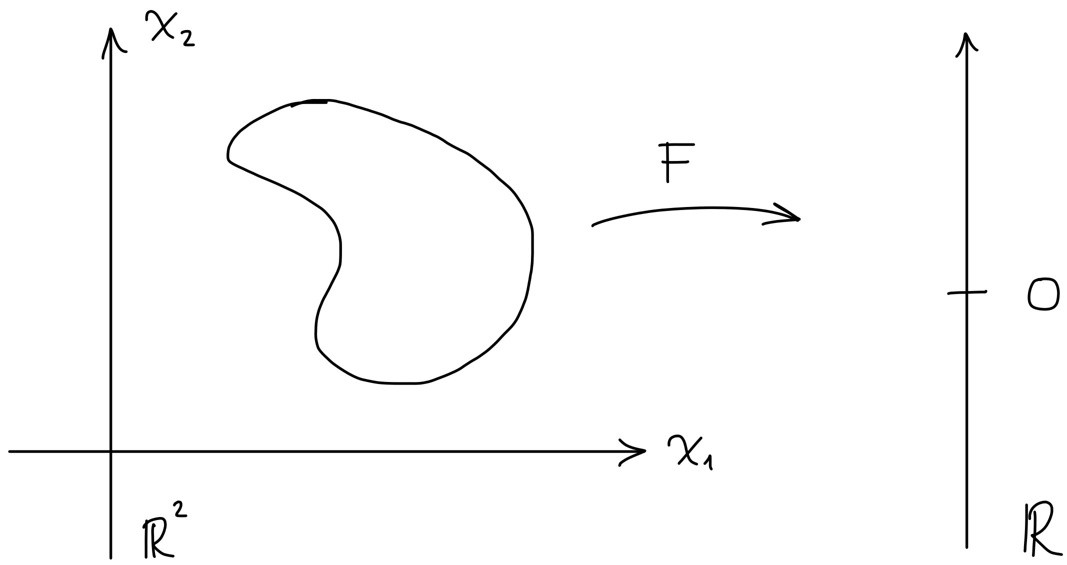
El conjunto de nivel cero de F,

$$F^{-1}(\{0\}) := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x_1, x_2) \equiv 0 \},$$

es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que es cerrado (para F continua!).

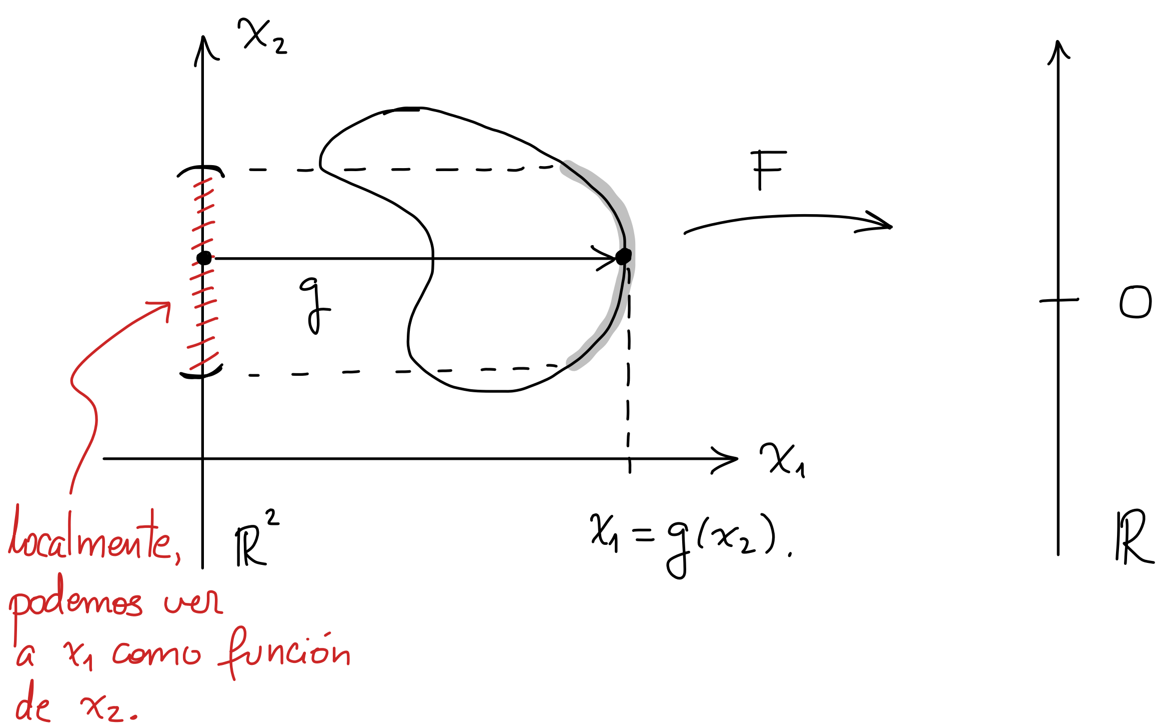
Nótese que los elementos de este conjunto satisfacen la relación $(*)$.

Podemos representar la situación de la siguiente forma:



De este gráfico vemos que, <u>localmente</u>, siempre es posible expresar una de las variables como función de la otra.

En nuestro caso, lo que queremos es expresar (localmente) a x_1 como función de x_2. Es decir, buscamos una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que tenga el siguiente significado, en términos de la figura anterior:



Para x_2 en la vecindad sombreada, que es el dominio de definición de g, se cumple

$$F(g(x_2), x_2) = 0 \quad (\text{para } x_2 \text{ en la vec. sombreada})$$

En este caso vemos que, efectivamente, hemos "despejado" a x_1 en favor de x_2: $x_1 = g(x_2)$.

Es por esto que decimos que una relación de la forma $F(x_1, x_2) = 0$ define a x_1 como función <u>implícita</u> de x_2 (o viceversa), ya que no conocemos a g *a priori*.

El teorema de la función implícita nos dice cuándo podemos garantizar la existencia de g. Habiendo dicho todo esto, aprovechemos para enunciar el teorema, en su versión general para funciones de varias variables.

Teorema Sea $F : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $\tilde{U}$ un abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$, una función diferenciable tal que $F(a,b) = 0$ para algún punto $(a,b) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$.

Llamar A a la matriz de derivadas de F en (a,b): $A := F'(a,b)$ y asumir que A_x, definida de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} A_x : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ h &\longmapsto A_x(h) := A(\overbrace{h}^{n\text{-componentes}}, \underbrace{0}_{m\text{-componentes}}), \end{aligned}$$

es invertible.

Entonces existen abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ y $W \subseteq \mathbb{R}^m$ con $(a,b) \in U$ y $b \in W$, tales que:

(i) Para todo $y \in W$ existe un <u>único</u> x tal que

$$(x,y) \in U \quad y \quad F(x,y) = 0.$$

(ii) Si a este x lo llamamos $g(y)$, entonces $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable, $g(b) = a$ y

$$\boxed{F(g(y), y) = 0} \qquad (\text{para todo } y \in W)$$

(iii) Además, $g'(b) = -(A_x)^{-1} A_y$, donde A_y es la matriz de la transformación lineal

$$\begin{aligned} A_y : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ k &\longmapsto A_y(k) = A(\overbrace{0}^{n\text{-componentes}}, \underbrace{k}_{m\text{-componentes}}). \end{aligned}$$

- La demostración de este teorema hace uso del teorema de la función inversa. Ver, por ejemplo, Rudin, "Principles of Mathematical Analysis", capítulo 9.

- La condición de que A_x sea invertible no es otra que la condición de que la matriz de derivadas

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}}^{A_x} \quad n \times n$$

evaluada en (a,b), sea invertible.

- Haciendo uso de la notación

$$F(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = (F_1(x,y),\dots,F_n(x,y),F_{n+1}(x,y),\dots,F_{n+m}(x,y))$$

podemos escribir la matriz de derivadas (evaluada en (a,b)), como sigue:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_m} \end{array}\right) = \underbrace{(A_x \mid A_y)}_{\substack{\text{matriz de } n\text{-filas} \\ \text{y } (n+m)\text{-columnas.}}} = F'$$

$A_x \rightarrow$ matriz $n \times n$

$A_y \rightarrow$ matriz de n-filas y m-columnas.

$\longrightarrow$ Veamos cómo se ven las cosas en el caso de nuestra función

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto F(x,y) := y - f'(x) \equiv F_1(x,y),$$

que corresponde al caso $n=1$, $m=1$.

Para la derivada tenemos

$$\underbrace{F'}_{A} = \Big(\underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial x}}_{A_x}, \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial y}}_{A_y} \Big)$$

$\rightarrow$ en este caso A_x es una matriz 1×1, así que A_x es invertible $\Leftrightarrow A_x \neq 0$

Tenemos: $$A_x = \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - f'(x)\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} f'(x) = -f''(x),$$

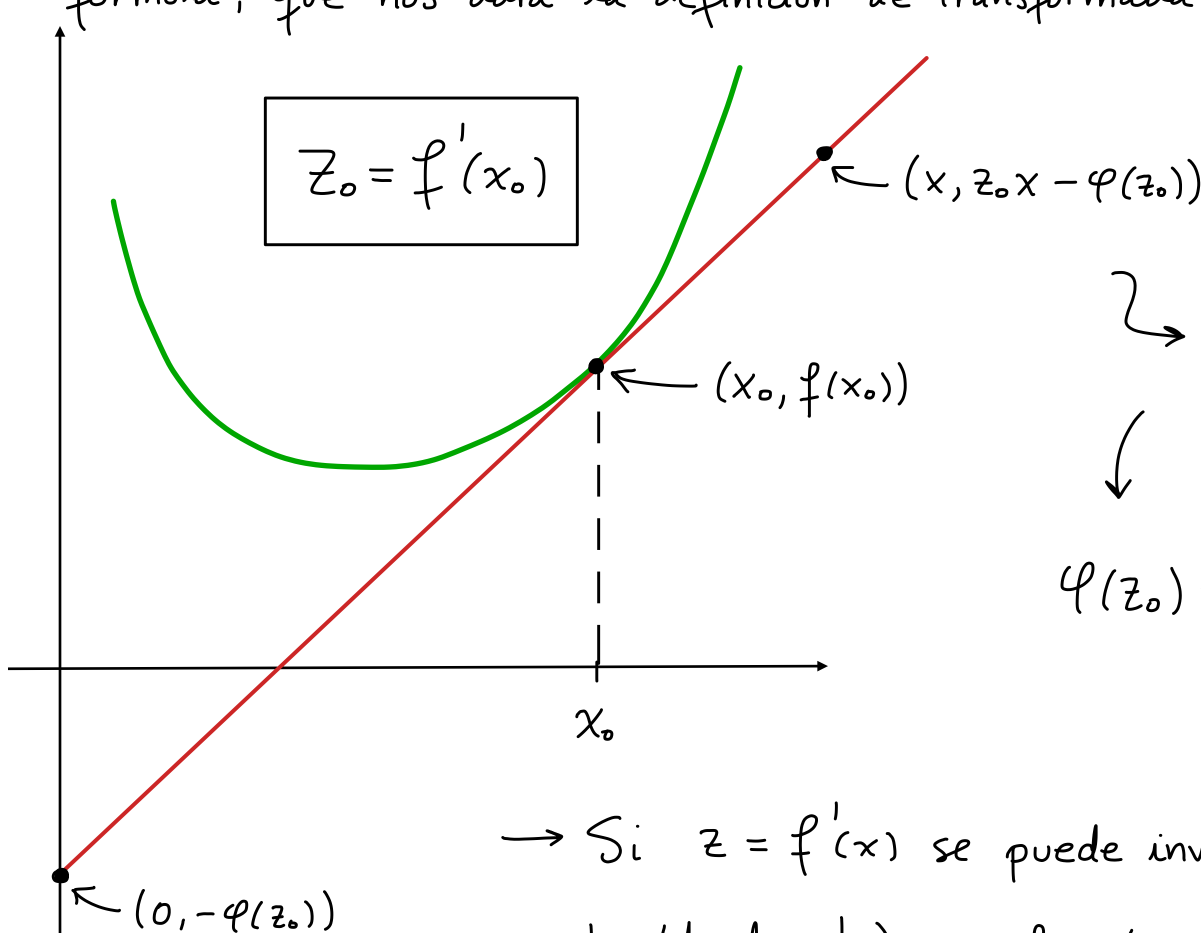
es decir,

$$\boxed{f''(x) \neq 0 \implies \text{Existe una función } g \text{ tal que } z = f'(g(z)) \ (\text{i.e. } x \equiv g(z)).}$$

La función $z \longmapsto \varphi(z)$ que estamos buscando se construye de la siguiente forma. Comenzando con x, evaluamos $f'(x)$ y hacemos $z = f'(x)$.

$\varphi(z)$ será entonces el negativo del punto de corte (con el eje y) de la recta con pendiente z que pasa por el punto $(x, f(x))$.

A partir de esta definición "geométrica" de $\varphi(z)$ es fácil obtener una "fórmula", que nos dará la definición de transformada de Legendre.



$$\to \frac{z_0 x - \varphi(z_0) - f(x_0)}{x - x_0} = z_0$$

$$\downarrow$$

$$\varphi(z_0) = z_0 x_0 - f(x_0)$$

$\rightarrow$ Si $z = f'(x)$ se puede invertir, de tal forma que exista (localmente) una función g t.q. $z = f'(g(z))$ (i.e. t.q. $x = g(z)$), entonces definimos:

Para una función $f(x)$ que cumple con las propiedades discutidas arriba, se define la transformada de Legendre como la función

$$\boxed{\mathcal{L}f(z) := z\,g(z) - f(g(z))}$$

Antes de pasar al caso de varias dimensiones, veamos cómo se usa la transformada de Legendre para pasar de la descripción Lagrangiana a la descripción Hamiltoniana de la dinámica clásica – por ahora en el caso de 1 grado de libertad –

$L(q,\dot{q}) \rightsquigarrow$ queremos considerar el momento canónico $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ como variable independiente. La condición requerida es, por lo tanto, que $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0$. Si esto es así, podemos despejar

$\dot{q} = \dot{q}(q,p)$ (aquí estamos dejando "quieta" a q...)

$\searrow$ $H(q,p) := \mathcal{L}L(q,p) = p\,\dot{q}(q,p) - L(q,\dot{q}(q,p))$.

<u>Ejemplo.</u>

Oscilador armónico $\longrightarrow$ $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$.

$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$; $\quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = m > 0$ (vemos que el caso $m=0$ sería problemático)

$\searrow \dot{q} = \dot{q}(q,p) = \frac{p}{m} \longrightarrow H(q,p) = p\cdot\frac{p}{m} - \left(\frac{1}{2}m\left(p/m\right)^2 - \frac{1}{2}kq^2\right)$

$$= p^2/2m + 1/2\,kq^2$$

Veamos ahora qué sucede con las ecuaciones de movimiento.

En el formalismo Lagrangiano tenemos $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial q}$.

Para $H(q,p)$ podemos calcular:

$$\rightarrow \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(p\dot q(q,p) - L(q,\dot q(q,p))\right) = \cancel{p\frac{\partial \dot q}{\partial q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\partial \dot q}{\partial q}}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = -\dot p$$

$$\rightarrow \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(p\dot q(q,p) - L(q,\dot q(q,p))\right) = \dot q(q,p) + \cancel{p\frac{\partial \dot q}{\partial p}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\partial \dot q}{\partial p}}$$

$$= \dot q$$

Hemos obtenido las ecuaciones de Hamilton:

$$\boxed{\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}}$$

Si escribimos $\gamma(t) = (q(t), p(t))$ para las curvas solución de las ecs. de Hamilton, vemos que se tiene, de forma equivalente,

$$\dot\gamma(t) = J\vec\nabla H(\gamma(t)), \quad \text{con} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto nos deja entrever que la función hamiltoniana H define, de cierta forma, un campo vectorial cuyo flujo son las ecuaciones de movimiento. La matriz J, que puede ser vista como una "forma cuadrática, antisimétrica, no-degenerada" (i.e. una forma simpléctica) juega un papel importante en la formulación general de la dinámica clásica Hamiltoniana.