Mecánica Clásica - Andrés Reyes (2019)

§9. Grupos de Lie.

Ref. Warner (Foundations of diff. manifolds and Lie groups).

Sean M y N dos variedades suaves y $\varphi : M \to N$ un mapa suave entre estas.

Recordemos la definición del "mapa tangente" o "derivada" de φ:

$$T\varphi : TM \longrightarrow TN$$
$$[\gamma]_m \longmapsto T\varphi([\gamma]_m) = [\varphi \circ \gamma]_{\varphi(m)}$$

Punto a punto, el mapa tangente está definido como el "push-forward" de φ.

$$T_m\varphi \equiv (\varphi_*)_m : T_m M \longrightarrow T_{\varphi(m)} N$$
$$[\gamma]_m \longmapsto [\varphi \circ \gamma]_{\varphi(m)}.$$

Según la definición de φ_*, podría uno llegar a pensar que sea posible ver este mapa como un mapa entre los respectivos espacios de campos vectoriales; algo como

$$\varphi_* : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N).$$

Sin embargo, que esto en general <u>no</u> es cierto, se puede ver fácilmente considerando los siguientes comentarios:

1) Si el mapa $\varphi : M \to N$ <u>no</u> es sobreyectivo, tendremos puntos $n \in N$ que no son la imagen de ningún $m \in M$. Por lo tanto no será posible definir que sería $(\varphi_* X)_n$ para $X \in \mathfrak{X}(M)$.

2) Si el mapa φ no es inyectivo, tendremos la situación en que para un $n \in N$ dado, $\varphi^{-1}(n)$ sea un conjunto de 2 o más puntos. Supongamos que $m_1, m_2 \in M$ son tales que $\varphi(m_1) = \varphi(m_2) = n$ $(m_1 \neq m_2)$. En este caso, la prescripción dada por la definición del push-forward no nos dice qué vector deberíamos asignar al punto n. Es decir, si $X \in \mathfrak{X}(M)$, tenemos 2 formas de asignar un vector tangente a T_nN:

$$(\varphi_*)_{m_i}(X_{m_i}) \in T_{\varphi(m_i)}N = T_nN \qquad i = 1,2.$$

Definición

Sea $\varphi : M \to N$ un mapa suave entre dos variedades M y N.

Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}(N)$ dos campos vectoriales, definidos sobre M y N, respectivamente.

Entonces decimos que X y Y están φ-relacionados $(X \sim_\varphi Y)$ si $T\varphi \circ X = Y \circ \varphi$. Es decir, si para todo $m \in M$ tenemos

$$T\varphi \circ X(m) \equiv (\varphi_*)_m(X_m) \overset{!}{=} Y \circ \varphi(m) \equiv Y_{\varphi(m)}$$

$$\rightarrow \quad X \sim_\varphi Y \underset{(\text{def})}{\iff} (\varphi_*)_m(X_m) = Y_{\varphi(m)} \quad \forall m \in M.$$

Nótese que $X \sim_\varphi Y$ justamente cuando el diagrama de la derecha es conmutativo

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "T\varphi"] & TN \\ M \arrow[u, "X"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\#"] & N \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$

$m \in$

Como acabamos de observar, para $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\varphi: M \to N$, el intento por definir un campo vectorial "$\varphi_* X \in \mathfrak{X}(N)$" a través de

$$(\varphi_* X)_{\varphi(m)} := (\varphi_*)_m (X_m)$$

va a ser, en general, fallido.

Sin embargo, cuando $X \sim_\varphi Y$, tenemos una situación en la que dicha prescripción sí da lugar a un campo vectorial sobre N, siendo este campo vectorial justamente Y.

Tenemos entonces: $X \sim_\varphi Y \iff T\varphi \circ X = Y \circ \varphi$

$$\iff \varphi_* X = Y$$

<u>Proposición.</u>

$\varphi: M \to N$ suave. $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$, $Y, Y' \in \mathfrak{X}(N)$.

Entonces se tiene:

$$\left(X \sim_\varphi Y \ \text{ y } \ X' \sim_\varphi Y' \right) \Rightarrow [X, X'] \sim_\varphi [Y, Y']$$

Demostración.

Debemos mostrar que $T\varphi \circ [X, X'] = [Y, Y'] \circ \varphi$.

> Calculamos ambos lados:

Tenemos

$$X \sim_\varphi Y \longrightarrow T\varphi \circ X = Y \circ \varphi$$

$$X' \sim_\varphi Y' \longrightarrow T\varphi \circ X' = Y' \circ \varphi$$

Sea $f \in C^\infty(N)$. Queremos verificar que $\forall m \in M$ se tiene

$$T_m\varphi ([X, X']_m)(f) \overset{!}{=} [Y, Y']_{\varphi(m)} (f).$$

Pero justamente de la definición del mapa tangente tenemos:

$$T_m\varphi([X,X']_m)(f) = [X,X']_m(f\circ\varphi)$$

$$= X_m(X'(f\circ\varphi)) - X'_m(X(f\circ\varphi))$$

$$= X_m((T\varphi\circ X')(f)) - X'_m((T\varphi\circ X)(f))$$

$X \sim_\varphi Y$

$X' \sim_\varphi Y'$

$$= X_m((Y'\circ\varphi)(f)) - X'_m((Y\circ\varphi)(f))$$

$$\overset{(*)}{=} X_m(Y'(f)\circ\varphi) - X'_m(Y(f)\circ\varphi)$$

$$= T\varphi(X_m)(Y'(f)) - T\varphi(X'_m)(Y(f))$$

$$= Y_{\varphi(m)}(Y'(f)) - Y'_{\varphi(m)}(Y(f))$$

$$= [Y,Y']_{\varphi(m)}(f)$$

$\square$.

$(*)$: $\quad (Y\circ\varphi)(f) \overset{!}{=} Y(f)\circ\varphi \quad , \quad f\in C^\infty(N)$

$$(Y\circ\varphi)(f)(m) = (Y\circ\varphi)_m(f)$$

$$= Y_{\varphi(m)}(f)$$

$$= Y(f)\big|_{\varphi(m)}$$

$$= Y(f)\circ\varphi(m).$$

Definición Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable dotada de una estructura de grupo, de tal forma que el mapa

$$G\times G \longrightarrow G$$
$$g,h \longmapsto gh^{-1}$$

es suave.

Ejemplos de grupos de Lie

- $\mathbb{R}^n$, con la adición como operación de grupo.
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, bajo multiplicación
- $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^*$, bajo multiplicación
- G, H: grupos de Lie $\Rightarrow$ $G \times H$ grupo de Lie, donde

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

- $Gl(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ invertible}\}$, $A \cdot B = AB$

- $Gl(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n := \{Gl(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n, \cdot\}$, donde

$$(A_1, v_1) \cdot (A_2, v_2) := (A_1 A_2, A_1 v_2 + v_1)$$

"producto semidirecto".

- $SO(n) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) \mid A A^T = \mathbb{1}_n,\ \mathrm{Det}\, A = 1\}$

$\longrightarrow$ En particular nos interesa estudiar el grupo de rotaciones 3-dim, $SO(3)$.

——— // ———

Sean G un grupo de Lie y $g \in G$ un elemento cualquiera. La multiplicación da lugar a 2 tipos de acción de G sobre sí mismo.

- Acción a izquierda: $l_g: G \longrightarrow G$, $a \longmapsto l_g(a) := ga$

- Acción a derecha: $r_g: G \longrightarrow G$, $a \longmapsto r_g(a) := ag$.

De la definición de grupo de Lie se sigue que tanto l_g como r_g son difeomorfismos.

Por esta razón, el push-forward $(l_g)_* X$ de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ es en este caso un campo vectorial bien definido!

Recordemos que $((l_g)_* X)_{l_g(a)} = (l_{g*})_a (X_a)$.

Así, $X \sim_{l_g} X$ quiere decir $(l_{g*})_a (X_a) = X_{l_g(a)}$, i.e.

$$l_{g*} X = X \quad \longrightarrow X \text{ es } l_g\text{-invariante}.$$

Un campo vectorial X que sea l_g-invariante para todo $g \in G$ se denomina "campo vectorial invariante a izquierda".

Nos interesa estudiar el conjunto de todos los campos vec. invariantes a izquierda:

$$\mathcal{L}(G) := \{ X \in \mathfrak{X}(G) \mid l_{g*} X = X \quad \forall g \in G \}.$$

Observemos que, por la proposición anterior, tenemos:

$$X, Y \in \mathcal{L}(G) \Rightarrow [X, Y] \in \mathcal{L}(G)$$

$$\Rightarrow (\mathcal{L}(G), [\,,\,]) \text{ es un álgebra de Lie.}$$

<u>Definición</u>

Decimos que $(\mathcal{L}(G), [\,,\,])$ es el álgebra de Lie de G.

—————— // ——————

En general, el conjunto de todos los campos vectoriales de una variedad M, $\mathfrak{X}(M)$, es un espacio vectorial de dimensión infinita. Una de las razones por las cuales es interesante estudiar $\mathcal{L}(G)$, es porque $\dim \mathcal{L}(G) < \infty$.

Esto, a su vez, se deriva del hecho de que el valor de un campo vectorial invariante a izquierda está completamente determinado por el valor que asume sobre la identidad $e \in G$. Esto es fácil de ver a partir de la definición, ya que $l_{g*} X = X$ quiere decir:

$$(l_{g*})_a (X_a) = X_{l_g(a)} .$$

En particular, si $a = e$, tenemos $l_g(a) = ga = ge = g$, luego $X \in \mathcal{L}(G) \Rightarrow$

$$X_g = l_{g*}(X_e) ,$$

es decir, X está completamente determinado por X_e.

Ahora bien, $X_e \in T_eG$ = "plano tangente" en la identidad $\rightarrow \dim T_eG = \dim G$.

Es posible construir un isomorfismo de espacios vectoriales entre T_eG y $\mathcal{L}(G)$, de la siguiente manera:

$$\Psi : \mathcal{L}(G) \longrightarrow T_e G$$
$$X \longmapsto \Psi(X) := X_e \equiv \underbrace{(l_{g^{-1}})_* (X_g)}$$

no depende de g, ya que $l_{g*} X = X$.

Mostremos que, en efecto, Ψ es un isomorfismo de esp. vectoriales.

- Ψ es lineal: está claro que sí.
- Ψ es 1-1:
  Tenemos que $\Psi(X) = \Psi(Y)$ implica $X_e = (l_{g^{-1}})_* Y_g \ \forall g \in G$, luego $Y_g = l_{g*} X_e \equiv X_g$, así que $X = Y$.

• Ψ es sobre:

En efecto, sea $A \in T_eG$. Definamos $X^A \in \mathfrak{X}(G)$ a través de

$$X^A_g := (l_g)_*(A).$$

Se deja como ejercicio mostrar que X^A es un campo vectorial invariante a izquierda: $X^A \in \mathcal{L}(G)$.

Ahora, como $X^A_e = A$, tenemos $\Psi(X^A) = A$.

Nótese que, como consecuencia de que $\Psi : \mathcal{L}(G) \to T_eG$ es un isomorfismo, tenemos que $\dim \mathcal{L}(G) = \dim G$.

De gran importancia es también el hecho de que, debido a este isomorfismo, es posible dotar a T_eG de una estructura de álgebra de Lie. El "corchete" se define de la siguiente manera:

$$A, B \in T_eG \longrightarrow [A,B] := \Psi([X^A, X^B]).$$

<u>Ejemplo</u>

Sea $G = (\mathbb{R}, +)$ (el conjunto de los reales, con la adición como operación de grupo)

Como la operación de grupo es la adición, la acción a izquierda definida anteriormente toma la siguiente forma simple: $g \in \mathbb{R} \hookrightarrow l_g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$p \longmapsto l_g(p) = g + p \quad \text{(traslación)}$$

Ahora bien, para describir a $\mathbb{R}$ como variedad diferenciable, solo hace falta usar un sistema global de coordenadas (una sola "carta"), que puede ser tomada como la identidad:

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \leftarrow \text{ℝ visto como espacio modelo.}$$

$$p \longmapsto \underbrace{x(p)}_{} := p$$

ℝ visto como variedad

→ la coordenada asociada a p es p mismo.

Sobre cada $p \in \mathbb{R}$ tenemos entonces el espacio tangente $T_p\mathbb{R}$. Este es un espacio vectorial de dimensión 1, generado por el vector base $\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p$

$$\rightarrow \quad T_p\mathbb{R} = \operatorname{span}\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p \right\}.$$

Ahora, como x es un sistema global, tenemos que $\frac{\partial}{\partial x}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Como este campo vec. no se anula en ningún punto, concluimos que todo campo vectorial sobre $\mathbb{R}$, digamos $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$, debe ser de la forma

$$X = f\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{para cierta función } f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Recordemos que tenemos también la posibilidad de describir $\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p$ como una clase de equivalencia de curvas. Por ejemplo, podemos usar

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p = [\gamma_{e_1}]_p \;; \quad \gamma_{e_1}(t) = p + t\,e_1$$

vector unitario ("$\hat{\imath}$")

Entonces, para un campo vectorial $X = f\frac{\partial}{\partial x}$,

no preguntamos ¿qué implica la condición

$$lg_* X = X \,?$$

Tenemos $X_p = f(p)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p$, luego

$$(lg_*)_p(X_p) = (lg_*)_p\left(f(p)[\gamma_{e_1}]_p\right)$$

$$= f(p)(lg_*)_p\left([\gamma_{e_1}]_p\right) = f(p)[\underbrace{lg\circ\gamma_{e_1}}]_{lg(p)}$$

$$= f(p)[\gamma_{e_1}]_{lg(p)}$$

$$lg\circ\gamma_{e_1}(t) = lg(p+te_1)$$
$$= p+g+te_1$$
$$= lg(p)+te_1$$

→ Esto implica que

$lg_* X = X$ si y solo si

$$\underbrace{f(p)[\gamma_{e_1}]_{lg(p)}} \equiv (lg_*)_p(X_p) \overset{!}{=} X_{lg(p)} \equiv f(p+g)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{lg(p)}$$

$$= f(p)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{lg(p)}$$

⟶ Concluimos que $X = f\frac{\partial}{\partial x}$ es un campo invariante a izquierda si y solo si $f(p+g) = f(p)$ $\forall\, p, g \in \mathbb{R}$. Es decir, f es una constante

$$\longrightarrow \quad \mathcal{L}(\mathbb{R}) = \left\{ \lambda\frac{\partial}{\partial x} \;\middle|\; \lambda\in\mathbb{R}\right\} \cong \mathbb{R}$$

Definición

Sean G y H dos grupos de Lie.

Un mapa $\varphi : G \to H$ que simultáneamente sea

i) un homomorfismo de grupos y

ii) un mapa suave.

se denomina homomorfismo de grupos de Lie.

— // —

Consideremos el diferencial de $\varphi : G \to H$, un homomorfismo de grupos de Lie:

$$d\varphi \equiv T\varphi : \quad TG \longrightarrow TH$$
$$[\gamma]_g \longmapsto [\varphi \circ \gamma]_{\varphi(g)} .$$

Como φ es homomorfismo, tenemos que $\varphi(e_G) = e_H$, luego al restringir $T\varphi$ al espacio tangente sobre la identidad, obtenemos un mapa (usamos la misma notación para ambos mapas)

$$d\varphi \equiv T_e\varphi : \; T_eG \longrightarrow T_eH$$

Como hemos visto arriba, tanto T_eG como T_eH son álgebras de Lie. Tenemos entonces el siguiente resultado importante:

Teorema (cf. Warner, thm 3.14)

Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathcal{L}(G)$ y $\mathcal{L}(H)$, respectivamente, y sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces

(i) $X \sim_\varphi d\varphi(X) \quad \forall \; X \in \mathcal{L}(G)$

(ii) $d\varphi : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Demostración.

Siguiendo Warner §3.14, tenemos:

- De la definición de $\mathcal{L}(G)$ tenemos una identificación natural $T_eG \leftrightarrow \mathcal{L}(G)$, dada por $X_g = l_{g*}(X_e)$, donde X_e es un vector tangente en la identidad ($X_e \in T_eG$), y $g \mapsto X_g$ es el correspondiente campo vectorial invariante a izquierda ($X \in \mathcal{L}(G)$).

  Haremos uso de dicha identificación cuando sea conveniente.

- $\varphi : G \to H$ homomorfismo quiere decir (además de que φ es suave) que $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$.

  Haciendo uso de la acción a izquierda (tanto en G como en H), podemos reescribir esta propiedad de la siguiente forma:

  → tomando $g, x \in G$, tenemos

$$\underbrace{\varphi(g\cdot x)}_{} = \underbrace{\varphi(g)\cdot\varphi(x)}_{}$$

$$= \varphi(l_g x) \qquad = l_{\varphi(g)}(\varphi(x))$$

$$= \varphi \circ l_g(x) \qquad = l_{\varphi(g)} \circ \varphi(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi \circ l_g = l_{\varphi(g)} \circ \varphi. \qquad (1)$$

Con esto podemos mostrar (i) → $X \sim_\varphi d\varphi(X)$. Veamos:

Si $X \in \mathcal{L}(G)$ (campo invariante a izquierda), definimos $\tilde{X} := d\varphi(X)$ (aquí $d\varphi$ denota el mapa tangente / derivada de φ).

Lo que queremos mostrar es que, para $g \in G$,

$$\tilde{X}_{\varphi(g)} = d\varphi(X_g).$$

Esto equivale a que el diagrama

$$\begin{tikzcd} TG \arrow[r, "d\varphi"] & TH \\ G \arrow[u, "X"] \arrow[r, "\varphi"'] & H \arrow[u, "\tilde{X}"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, i.e, $X \sim_\varphi \tilde{X} \equiv d\varphi(X)$.

En efecto, tenemos

$$\tilde{X}_{\varphi(g)} = (l_{\varphi(g)})_* \tilde{X}_e = (l_{\varphi(g)})_* \, d\varphi(X_e)$$

$$= T_{e_H} l_{\varphi(g)} \cdot T_{e_G}\varphi(X_e)$$

$$= T_e (l_{\varphi(g)} \circ \varphi)(X_e) \qquad \text{(regla de la cadena)}$$

$$\overset{(1)}{=} T_e(\varphi \circ l_g)(X_e) \equiv d\varphi \circ l_{g*}(X_e) \quad \text{(nuevamente r. de la cadena)}$$

$$= d\varphi(X_g) \qquad (X \in \mathcal{L}(G)).$$

Con esto queda establecido (i).

La afirmación (ii) es equivalente a la afirmación siguiente:

" $X, Y \in \mathcal{L}(G) \Rightarrow \widetilde{[X,Y]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ "

Para mostrar esto, hacemos uso de la proposición discutida en la pág 72. De dicha proposición se sigue que

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]_e = d\varphi([X,Y]_e)$$

Pero –por definición– $\widetilde{[X,Y]}$ es aquel campo vectorial a izquierda en H cuyo valor en e coincide con $d\varphi([X,Y]_e)$. Como este campo vectorial es <u>único</u>, debemos entonces tener $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X,Y]}$.

———————— // ————————

Lo importante del teorema anterior es que un homomorfismo $\varphi: G \to H$, que tiene la propiedad de que $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$, da lugar a una versión infinitesimal,

$$d\varphi : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$

y para esta versión infinitesimal lo que se cumple es

$$d\varphi([X,Y]) = [d\varphi(X), d\varphi(Y)].$$

Es decir, mientras que φ preserva el producto de elementos en G (resp. H), $d\varphi$ preserva los conmutadores en las álgebras de Lie respectivas (versión infinitesimal).

Una pregunta relevante es ¿hasta qué punto la versión infinitesimal determina a la versión global?
La respuesta depende de ciertas propiedades de los grupos de Lie involucrados. Por ejemplo, tenemos:

Teorema (cf. Warner, thm 3.16)
Sea G un grupo de Lie conexo, y sean φ, ψ dos homomorfismos de G en H tales que $d\varphi = d\psi : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(H)$. Entonces $\varphi = \psi$.
En otras palabras, si G es conexo, la versión infinitesimal determina completamente la versión global.
——— // ———
Si el grupo G es simplemente conexo ($\pi_1(G) = 0$), es incluso posible reconstruir la versión global a partir de la versión infinitesimal:

Teorema (cf. Warner, thm. 3.27)
Sean G y H grupos de Lie, con $\mathcal{L}(G), \mathcal{L}(H)$ sus álgebras de Lie respectivas. Suponer que además G es simplemente conexo. Sea $\psi : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Entonces existe un homomorfismo (único) $\varphi : G \to H$ de grupos de Lie tal que $d\varphi = \psi$.

La aplicación exponencial

Sean G un grupo de Lie y $\mathcal{L}(G)$ su álgebra de Lie.
La aplicación exponencial es un mapa

$$\exp : \mathcal{L}(G) \longrightarrow G$$
$$A \longmapsto \exp(A)$$

entre el álgebra de Lie y el grupo de Lie, que tiene varias propiedades; entre ellas:

- $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$
- $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$, para $[A,B]=0$.

Def. Un homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ se denomina "subgrupo a un parámetro" de G.

→ En esta definición, $\mathbb{R}$ es considerado como grupo de Lie con la suma como la operación de grupo, de tal forma que φ satisface

$$\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$$

En el ejemplo de la pág 75 mostramos que el álgebra de Lie de $(\mathbb{R},+)$ es isomorfa a $\mathbb{R}$. De hecho, mostramos que el conjunto de los campos invariantes a izquierda en $\mathbb{R}$ (con x coord. global en $\mathbb{R}$) es

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial x} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si $X \in \mathcal{L}(G)$, entonces claramente el mapa

$$\psi_X : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(G)$$
$$\lambda \frac{\partial}{\partial x} \longmapsto \lambda X$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Por el teorema anterior (Warner, thm 3.27) sabemos entonces que existe un homomorfismo (único)

$$\phi_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$$
$$t \longmapsto \phi_X(t) \qquad \rightsquigarrow \quad \phi_X(t+s) = \phi_X(t)\,\phi_X(s)$$

tal que $d\phi_X = \Psi_X$.

Esto quiere decir que $d\phi_X\left(\lambda \frac{\partial}{\partial x}\right) = \Psi_X\left(\lambda \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \lambda X$.

<u>Definición</u>

La aplicación exponencial es el mapa

$$\exp : \mathcal{L}(G) \longrightarrow G$$
$$X \longmapsto \exp(X) := \phi_X(1).$$

Nótese que, debido al teorema de la pág 76 (Warner, thm 3.14), tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim_{\phi_X} d\phi_X\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv X$$

($\frac{\partial}{\partial x}$ y X están ϕ_X-relacionados)

Pero el diferencial de $t \longmapsto \phi_X(t)$, $d\phi_X$, no es otra cosa que $\dot{\phi}_X(t)$, luego lo que tenemos en realidad no es otra cosa que

$$X_{\phi_X(t)} = \dot{\phi}_X(t),$$

i.e, $\phi_X(t)$ es una curva integral de X, y es la única tal que $\phi_X(0) = e$.