§7. Variedades diferenciables.

Al estudiar sistemas con restricciones holonómicas vimos cómo el concepto de "hipersuperficie" nos permitía trabajar de forma más adecuada. Por ejemplo, al discutir el principio de D'Alembert, haciendo uso de coordenadas adaptadas a la hipersuperficie de restricción ("coordenadas generalizadas"), se obtienen directamente las ecuaciones de Euler-Lagrange.
Es de esta forma como el concepto de variedad aparece en mecánica clásica: el espacio de configuración es una variedad diferenciable, así como lo son el espacio (haz) tangente, el espacio de fase, el grupo de rotaciones, etc..
Pero no solo es importante este concepto en la mecánica clásica. Cualquier noción moderna de espacio-tiempo debe estar ligada al concepto de variedad. En relatividad general el espacio-tiempo es descrito por una variedad de dimensión 4 de tipo "semi-Riemanniano", que permite dar razón de forma adecuada de la estructura causal.
De forma más general, todas las teorías fundamentales -como las conocemos hoy en día- son "teorías gauge", cuya formulación requiere de forma esencial hacer uso del concepto de variedad.
Para llegar a la definición de variedad es necesario pasar por la de espacio topológico, ya que una variedad diferenciable es un espacio topológico, con ciertas estructuras adicionales.
Actualmente el uso de la topología ha permeado varias áreas de la física, primordialmente la física de la

materia condensada, donde el entendimiento de nuevos estados de la materia cuántica requiere el uso de nociones de topología. En mecánica clásica, como lo descubrió Poincaré, el uso de la topología es también relevante (sistemas dinámicos).

Comenzaremos entonces con una breve discusión acerca de topología, que servirá para establecer algunas convenciones e introducir conceptos que serán útiles más adelante.

Una referencia recomendada es: "Topology: A First Course", James R. Munkres.

Continuidad & topología.

Comenzaremos recordando la definición "ε-δ" de continuidad, como se estudia en los cursos de cálculo diferencial.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ si

"para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$
tal que $|x - x_0|$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$".

Si f es continua en x_0 para todo $x_0 \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, decimos que f es continua en (el intervalo) (a,b).

En el caso en que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la definición de continuidad dada arriba se mantiene, con la única diferencia de que ahora el valor absoluto es reemplazado por la norma:

$$|x - x_0| \longrightarrow \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$|f(x) - f(x_0)| \longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m}$$

(cf. Marsden & Tromba, Cálculo vectorial, §2.2).

Vemos entonces que la idea de "vecindad abierta" entra de forma crucial en la definición de continuidad.

En el caso de $\mathbb{R}^n$ tenemos una <u>norma</u> $\|\cdot\|$, definida por

$$\|x\| := \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2},$$

para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Esta norma da lugar, de manera natural, a una noción de <u>métrica</u>. La métrica $d(\cdot,\cdot)$ inducida por $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x, y &\longmapsto d(x,y) := \|x - y\|. \end{aligned}$$

Dicha función d satisface, en efecto, todas las propiedades requeridas de una métrica, a saber, $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n)$,

(i) $d(x,y) \geqslant 0$; $d(x,y) = 0$ sii $x = y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Son estas propiedades las que nos permiten tener una imagen intuitiva, basada en la geometría del espacio Euclídeo, acerca del concepto de "vecindad".

<u>Definición</u>.

Sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Definimos la bola abierta de radio ε y centrada en x_0 como el conjunto

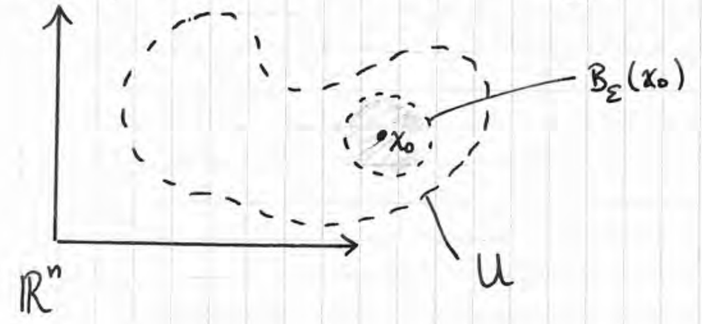
$$B_\varepsilon(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \varepsilon \}.$$

$x \in B_\varepsilon(x_0)$ sii $d(x, x_0) < \varepsilon$

A partir de la noción de bola abierta en $\mathbb{R}^n$ podemos (al menos de forma intuitiva) aproximarnos a la noción de <u>conjunto abierto</u>.

<u>Definición</u>

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que U es un <u>conjunto abierto</u> si para todo punto $x_0 \in U$ existe algún $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$.



<u>Ejercicio</u>

Mostrar que $B_\varepsilon(x_0)$ es en sí mismo un conjunto abierto
(ayuda: usar la desigualdad triangular)

► De manera intuitiva, podemos pensar que un conjunto abierto es un conjunto que no contiene a sus "puntos frontera".

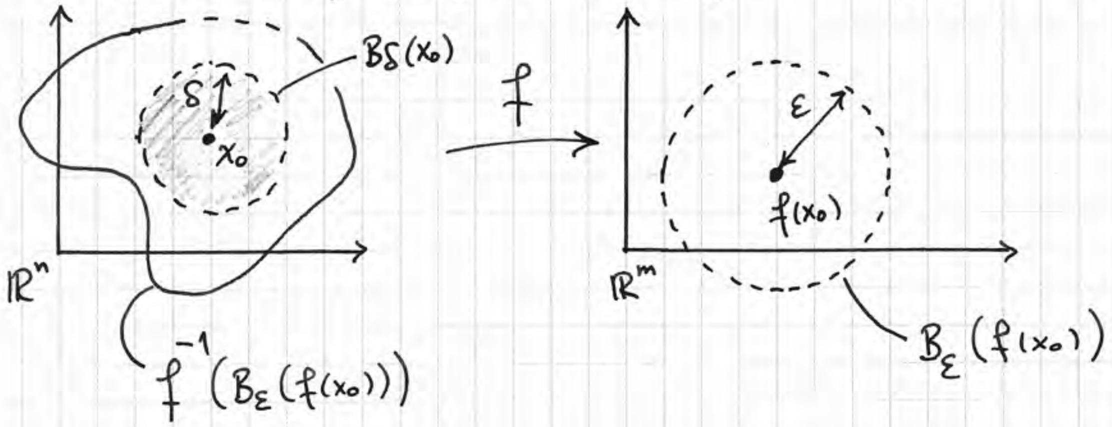
Volvamos a la definición "ε-δ" de continuidad en $\mathbb{R}^n$.
Tomemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Si f es continua en x_0, entonces debe existir $\delta > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
Esto se puede reformular en términos de bolas abiertas, así:

Si $x \in B_\delta(x_0)$, entonces $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$.

También podemos reformular la condición de continuidad de la siguiente forma:
"Dado $\varepsilon > 0$ (arbitrario), existe una bola abierta ($B_\delta(x_0)$) centrada en x_0 que está contenida en la preimagen —bajo f— de $B_\varepsilon(x_0)$", i.e.,

$\forall\, \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in B_\varepsilon(x_0)\}$$



▶ Se hace evidente entonces que si $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en todo punto de A (asumamos, por simplicidad, que el dominio A de f es abierto en $\mathbb{R}^n$) entonces $f^{-1}(U)$ será un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ para todo $U \subseteq \mathbb{R}^m$ que sea abierto.

Está claro entonces que las nociones de continuidad y de "conjunto abierto" están íntimamente relacionadas.
Para poder trabajar de forma más general, es necesario detectar las propiedades básicas mínimas que habría que retener para poder llamar a un conjunto "abierto".

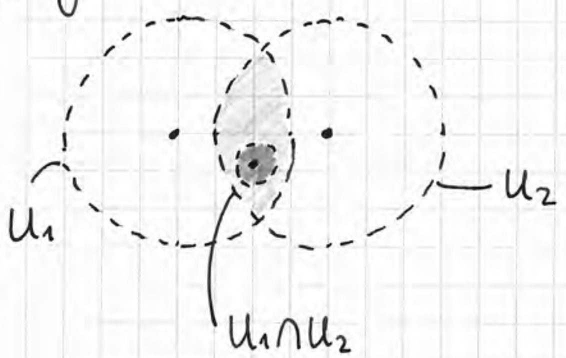
Tomando como guía el caso de $\mathbb{R}^n$ con la definición de conjunto abierto dada arriba, es relativamente fácil verificar (ejercicio!) que se cumplen las siguientes 3 propiedades:

(i) tanto el conjunto vacío (ϕ) como $\mathbb{R}^n$ mismo son abiertos de $\mathbb{R}^n$.

(ii) si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección arbitraria de abiertos en $\mathbb{R}^n$, entonces su unión $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ también es abierto en $\mathbb{R}^n$

(iii) si $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ es una colección finita de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces su intersección también lo es.

Las propiedades (i) y (ii) son inmediatas.
La idea básica para establecer (iii) se puede expresar en un dibujo:



Es importante recalcar que (iii) solo se cumple para colecciones finitas de abiertos. De hecho, si tomamos $x_0 \in \mathbb{R}^m$ y consideramos una colección enumerable infinita de bolas abiertas concéntricas centradas en x_0 y con radio decreciente, vemos que su intersección, aunque distinta del conjunto vacío, no será un conjunto abierto.
Podemos tomar, por ejemplo, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, entonces

$\{B_{\varepsilon_n}(x_0)\}_{n=1,2,\dots}$ es una colección infinita

de abiertos. Es facil ver que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon_n}(x_0) = \{x_0\}$;

pero $\{x_0\}$ no es un abierto de $\mathbb{R}^n$, según la definición que hemos dado.

Definición. (Topología).

Sean X un conjunto y $\mathcal{T}$ una colección de subconjuntos de X tales que

(i) $\phi, X \in \mathcal{T}$

(ii) $U_\alpha \subseteq X$, $U_\alpha \in \mathcal{T}$, $\alpha \in \mathcal{I}$: conjunto arbitrario de índices

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha \in \mathcal{T}$$

(iii) $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Decimos entonces que $\mathcal{T}$ es una topología para X y que X es un espacio topológico.

Los elementos de $\mathcal{T}$ se denominan "conjuntos abiertos".

Observación:

En concordancia con la discusión sobre conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, las condiciones (ii) y (iii) se pueden reformular de la siguiente manera:

(ii) $\rightarrow$ "la unión arbitraria de abiertos es abierta"

(iii) $\rightarrow$ "la intersección finita de abiertos es abierta"

Ejemplo

Sea $X = \{a, b, c\}$, un conjunto de 3 elementos.

Al tratarse de un conjunto finito, existe también un número finito de posibilidades para dotar a X de una topología.

Cualquier topología de X, al ser una colección de subconjuntos de X, es entonces un subconjunto de $P(X)$, el conjunto potencia de X. El número de posibilidades es claramente finito, ya que $\mathcal{T}$ topología en $X \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq P(X) \Rightarrow$

$$\#\text{ de topologías en } X < |P^2(X)| = |P(P(X))| = 2^{|P(X)|} = 2^{2^{|X|}} = 2^8$$

Tenemos

$$P(X) = \{ \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X \}$$

$$\rightarrow |P(X)| = 2^{|X|} = 8.$$

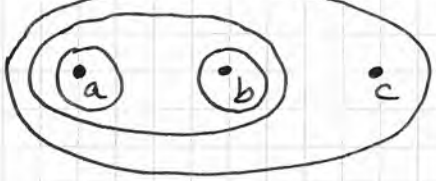
¿Qué subconjuntos de $P(X)$ (i.e. subcolecciones de subconjuntos de X) clasifican como topologías para X?

↳ Se deben cumplir las condiciones (i), (ii), (iii) de la definición.

Dentro de las muchas posibles escogencias, vamos a exhibir 2 ejemplos:

→ $\tau_1 = \{ \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \phi, X \}$

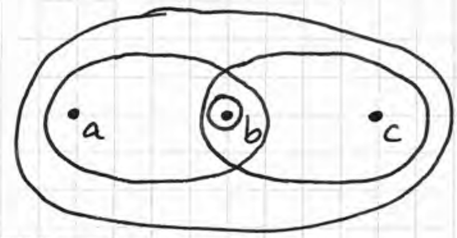
En términos de diagramas, esta topología se ve así:



(X, τ_1)

→ $\tau_2 = \{ \{a,b\}, \{b,c\}, \{b\}, \phi, X \}$

2 topologías distintas sobre X.



(X, τ_2)

Para ver qué influencia tiene la escogencia de topología en un espacio sobre la continuidad de funciones definidas sobre el mismo, vamos a introducir la definición general de continuidad.

<u>Definición</u> (Continuidad). Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. Decimos que una función $f: X \rightarrow Y$ es <u>continua</u> si $U \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_X$

Haciendo uso de la definición de continuidad, consideremos el conjunto $X = \{a, b, c\}$ del ejemplo anterior, junto con el mapa "identidad":

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X \\ m &\longmapsto f(m) = m. \end{aligned}$$

La pregunta ¿es f un mapa continuo? solo tiene sentido una vez hemos dotado a los espacios respectivos de una topología. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} f : (X, \tau_1) &\longrightarrow (X, \tau_1) \\ m &\longmapsto f(m) = m \end{aligned}$$

es continua.

Sin embargo, si al lado izquierdo consideramos a X en la topología τ_1, pero al lado derecho en la topología τ_2, entonces el mapa identidad <u>no</u> es continuo, ya que $\{b, c\} \subseteq X$ es abierto según τ_2, pero $f^{-1}(\{b, c\}) = \{b, c\}$, <u>no</u> es abierto según τ_1 !

—//—

En general hay un sinnúmero de topologías que se pueden usar sobre un espacio dado. La escogencia muchas veces es dictada por razones de conveniencia. En todo caso, siempre habrá 2 "extremos" (que son prácticamente "inútiles"!)

→ la topología discreta, donde cualquier subconjunto de X es abierto (i.e., $\tau = P(X)$)

→ la topología trivial, donde los únicos abiertos son X y ϕ. → $\tau = \{X, \phi\}$.

Surge entonces la siguiente pregunta:

¿Cómo comparar dos topologías que están definidas sobre un mismo conjunto?

Esto no siempre es posible. Sin embargo, si (X, τ_1) y (X, τ_2) son dos espacios topológicos sobre el mismo conjunto X, y resulta ser que $\tau_1 \supseteq \tau_2$, entonces decimos que τ_1 es una topología más <u>fina</u> que τ_2. (en sentido de que τ_1 posee más conjuntos abiertos)

Ejemplo:

$\tau_1 \qquad \supseteq \qquad \tau_2$

<u>Ejercicio.</u> Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ (un subconjunto de X. Suponer que para cada $x \in A$ existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq A$. Mostrar que A es un conjunto abierto.

<u>Solución:</u> Sea τ la topología en cuestión: (X, τ). Entonces tenemos: $\forall x \ \exists U_x \in \tau$ t.q. $x \in U_x \subseteq A$. Sea $V := \bigcup_{x \in A} U_x$.

Por (ii) en la definición de topología, V es abierto.

Además, $U_x \subseteq A \ \forall x$, luego $V = \bigcup_{x \in A} U_x \subseteq A$.

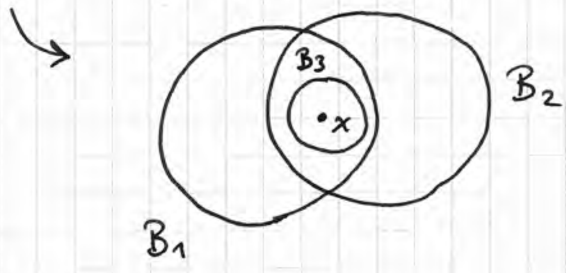
Finalmente, si $a \in A$, entonces $a \in U_a \subseteq V$, luego $A \subseteq V$. Tenemos entonces que $A = V$, luego A es abierto.

Bases

Definición Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X se denomina base si y solo si:

(i) Para todo $x \in X$ existe al menos un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

(ii) Si $x \in B_1 \cap B_2$, con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$



Pregunta: ¿Cómo generar una topología a partir de una base?

Un poco de reflexión nos muestra que con las intersecciones no vamos a tener problemas. El problema estará con las uniones.

↳ Tiene sentido intentar definir una topología τ (dada una base $\mathcal{B}$ para X) así:

τ: topología que consta de todas las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$.

Ejercicio: Mostrar que τ así definida es, en efecto, una topología.

→ Una forma equivalente (ejercicio!) de obtener la misma topología es la siguiente. Definir:

τ': $U \subseteq X$. U será un abierto (respecto a τ') si y solo si cumple con la siguiente propiedad:

$\forall x \in U \quad \exists B \in \mathcal{B}$ t.q. $x \in B \subseteq U$.

Mostremos que τ' es, en efecto, una topología.

Nota: es claro que $\mathcal{B} \subseteq \tau'$, luego todo elemento de la base será un abierto.

Verifiquemos que se cumplen las 3 propiedades:

(i) $\phi \in \mathcal{T}'$: ok

$X \in \mathcal{T}'$? $\rightarrow$ Si $x \in X$ entonces por (i) en la definición de base, existe $B \in \mathcal{B}$ t.q. $x \in B \subseteq X$

$\Rightarrow X \in \mathcal{T}'$.

(ii) Uniones arbitrarias:

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}} \subseteq \mathcal{T}'$ una colección arbitraria de elementos de $\mathcal{T}'$. Para mostrar que la unión de los U_α está en $\mathcal{T}'$, consideremos un $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} U_\alpha$ arbitrario. Entonces $x \in U_\beta$ para algún $\beta \in \mathcal{J}$. Como U_β es abierto (i.e. $U_\beta \in \mathcal{T}'$) entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tq $x \in B \subseteq U_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} U_\alpha$ $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} U_\alpha$ es abierto.

(iii) Intersecciones finitas:

Sean $U, V \in \mathcal{T}'$ y $x \in U \cap V$ (asumiendo que $U \cap V \neq \phi$). Entonces $\exists$ B_u, $B_v \in \mathcal{B}$ tales que: $x \in B_u \subseteq U$ y $x \in B_v \subseteq V$. Claramente se tiene $x \in B_u \cap B_v \subseteq U \cap V$. Pero entonces (por la definición de base) debe existir $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_u \cap B_v \subseteq U \cap V$, luego $U \cap V \in \mathcal{T}'$! La generalización a una intersección finita no presenta mayor dificultad (ejercicio!).

—— // ——

Ejemplo. La topología estándar en $\mathbb{R}^n$.

Ahora debe ser evidente que las bolas abiertas $B_\varepsilon(x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ forman una base que, según lo discutido arriba da lugar a una topología en $\mathbb{R}^n$. A esta topología la llamamos la "topología estándar".

Ejercicio. Sea $\{\tau_\alpha\}_\alpha$ una colección de topologías en X. Muestre que $\bigcap_\alpha \tau_\alpha$ también es una topología en X.

Ejercicio. Muestre que si $\mathcal{B}$ es una base para una topología τ en X, entonces τ es la intersección de todas las topologías en X que contienen a $\mathcal{B}$:

$$\tau = \underbrace{\bigcap_{\tau' \supseteq \mathcal{B}}}\tau'$$

esto tiene sentido, por el ejercicio anterior.

Solución:

"$\supseteq$": inmediato, ya que $\tau \supseteq \mathcal{B}$, luego $\tau \supseteq \bigcap_{\tau' \supseteq \mathcal{B}} \tau'$

(aquí hemos usado $A \supseteq A \cap B$).

"$\subseteq$": sea $U \in \tau$. Queremos mostrar que $U \in \bigcap_{\tau' \supseteq \mathcal{B}} \tau'$. En otras palabras, queremos mostrar que si U es un abierto en τ, entonces es un abierto en cualquier topología τ' que contenga a $\mathcal{B}$.

Entonces, dado que $U \in \tau$, U se puede expresar como $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, donde para cada $x \in U$ se tiene $x \in B_x \subseteq U$, con $B_x \in \mathcal{B}$ (ya mencionamos que τ se puede obtener a partir de uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$).

Pero entonces $B_x \in \tau'$, ya que $\mathcal{B} \subseteq \tau'$. Como τ' es una topología, entonces debe valer $\bigcup_{x \in U} B_x \in \tau'$, así que $\tau \subseteq \bigcap_{\tau' \supseteq \mathcal{B}} \tau'$.

La topología producto.

Sean X, Y dos espacios topológicos.

Definición. La topología producto en $X \times Y$ es aquella topología que tiene como base la colección
$$\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \subseteq X \text{ abierto}, \ V \subseteq Y \text{ abierto} \}$$

Observaciones:

(i) Es fácil verificar que $\mathcal{B}$ es efectivamente una base para una topología.

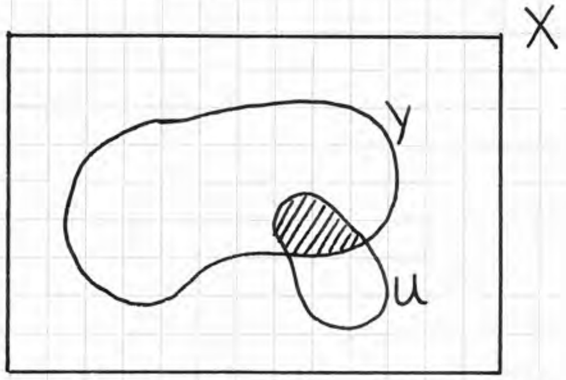
(ii) También es fácil ver que $\mathcal{B}$ por sí sola no es una topología (considerar uniones).

(iii) Se puede mostrar (cf. Munkres, teorema 2.4.1) que si $\mathcal{B}$ es una base para X y $\mathcal{C}$ una base para Y, entonces $\mathcal{D} = \{ B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ y } C \in \mathcal{C} \}$ es una base para la topología producto de $X \times Y$.

La topología de subespacio

Definición Sean X un espacio topológico, con topología τ y $Y \subseteq X$, un subconjunto de X. Entonces
$$\tau_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \tau \}$$
es una topología para Y, llamada la topología de subespacio.

La figura ilustra la definición →



Observación.

Consideremos 2 espacios topológicos X y Y. Si A y B son subconjuntos, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, tenemos -según las definiciones anteriores- 2 opciones para dotar a $A \times B$ de una topología.

→ Podemos dotar a A de la topología de subespacio heredada de X, así como a B y luego dar a $A \times B$ la topología producto.

→ También podemos dar a $X \times Y$ la topología producto y luego dotar a $A \times B \subseteq X \times Y$ de la topología de subespacio.

Ejercicio. Mostrar que las 2 construcciones dan lugar a una misma topología en $A \times B$.

——— // ———

En el caso particular de $\mathbb{R}$ podemos usar la relación de orden "$<$" para definir una topología, la "topología del orden", de la siguiente forma.

Sea $\mathcal{B}$ = colección de todos los intervalos de la forma (a,b), para $a<b$, a,b finitos, así como los intervalos de la forma $[-\infty, a)$, $(a, \infty]$.

Es fácil verificar que $\mathcal{B}$ es una base. La topología inducida por esta base (topología del orden) coincide con la topología estándar de $\mathbb{R}$ definida anteriormente.

——— / ———

Como ilustración de lo que puede suceder al trabajar con subespacios, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo: $Y = [0,1) \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$.

→ En la topología de subespacio, $\{2\}$ es abierto en Y.

→ En la topología del orden en Y, $\{2\}$ no es abierto, ya que no hay elementos base contenidos en $\{2\}$.

Definición (Espacio topológico Hausdorff)

Sea X un espacio topológico. Decimos que X es Hausdorff sii para todo par de puntos $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ existe un par de abiertos U_1, U_2 tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \phi$.

Definición (Homeomorfismo).

Sean X y Y dos espacios topológicos y $f: X \to Y$ un mapa.

Decimos que f es un homeomorfismo, si f es biyección, es continua, y tiene inversa continua:

$f: X \to Y$ homeomorfismo $\Longleftrightarrow$
- f es sobre y 1-1
- f continua
- f^{-1} continua.

———— // ————

Desde el punto de vista de la topología, dos espacios que son homeomorfos son completamente equivalentes.

En otras palabras, en el contexto de espacios topológicos, la noción de equivalencia está dada por "homeomorfismo".

Esto es similar a como, por ejemplo, consideramos 2 espacios vectoriales si existe una transformación lineal invertible y biyectiva entre los dos espacios → en este caso la noción de equivalencia es "isomorfismo de espacios vectoriales".

Definición.

Decimos que un espacio topológico tiene una base enumerable cuando existe una colección enumerable de abiertos, digamos $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, de tal forma que todo abierto de X puede ser escrito en la forma

$$\bigcup_{i\in I} U_i \quad , \text{ donde } I \subseteq \mathbb{N}.$$

Por ejemplo, una colección enumerable de conjuntos que cumple con esta condición para $\mathbb{R}^n$ en la topología estándar, es la familia de bolas abiertas

$B_\varepsilon(x)$, donde $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ y las coordenadas de x también son racionales: $x = (x_1, \dots, x_n)$; $x_i \in \mathbb{Q}$.

De manera equivalente podemos decir que el espacio X tiene una base enumerable.

Se dice que un espacio topológico que tiene una base enumerable satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Definición

Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff M que tiene una base enumerable y que es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

→ "Localmente homeomorfo" quiere decir que para todo $x \in M$ existe un abierto $U \subseteq M$ con $x \in U$ y un mapa $\varphi_U : U \to \mathbb{R}^n$ que es un homeomorfismo.

Observación

No es difícil ver que la bola abierta $B_\varepsilon(0)$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. De esta forma, también es válido pedir que

$\varphi_U : U \to B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ sea un homeomorfismo: $U \approx B_\varepsilon(0)$

- Sea M una variedad topológica n-dimensional.
  Una carta en M es un par (U, φ) donde $U \subseteq M$ es un abierto y $\varphi : U \longrightarrow \underset{U'}{\underset{\rotatebox{90}{=}}{\varphi(U)}} \subseteq \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo $U \approx U'$.

- Una familia de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ se llama un atlas si la colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de abiertos cubre a M.

- Decimos que un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ es <u>suave</u> si las funciones de transición, definidas como

$$\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

  son funciones suaves.
  Nótese que los conjuntos $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$, de tal forma que la noción de suavidad de $\varphi_{\alpha\beta}$ es la estándar para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

- Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ dos atlases suaves en M.
  Decimos que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son suavemente equivalentes si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es un atlas suave.
  → Esta noción de equivalencia se puede usar para definir una relación de equivalencia sobre el conjunto de todos los atlas sobre M.

- Una estructura suave en M es una clase de equivalencia $[A]$ de atlases.

<u>Definición</u>

Una variedad suave es un par $(M, [A])$ donde M es una variedad topológica y $[A]$ una estructura suave en M.

<u>Ejemplo</u>

La esfera n-dimensional $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$.
Podemos definir un atlas que contiene $2(n+1)$ cartas, $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}_{i=1,\dots,n+1}$, de la siguiente forma:

$$U_i^+ = \{x \in S^n \mid x_i > 0\} \quad , \quad U_i^- = \{x \in S^n \mid x_i < 0\}$$

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \longrightarrow B_1^n(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < 1\}$$
$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$$

el símbolo "^" quiere decir que este elemento se omite.

Nótese que

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(y) = (y_1, \dots, y_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_i, \dots, y_n)$$

<u>Ejercicio</u>

Mostrar que las funciones de transición / cambios de carta

$\varphi_i^\sigma \circ (\varphi_j^{\sigma'})^{-1}$ son funciones <u>suaves</u>

<u>Ejemplo</u> El espacio proyectivo real. $\mathbb{RP}^n$.

Sea $\mathbb{RP}^n$ = conjunto de los subespacios 1-dimensionales de $\mathbb{R}^n$

$\equiv \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$

→ la relación de equivalencia "$\sim$" en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ se define así:

$$x \sim y \iff \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\mu y \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

i.e. si x y y generan "la misma recta".

Tenemos un mapa sobreyectivo

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{RP}^n \\ x &\longmapsto \pi(x) := [x] \end{aligned}$$

↳ clase de equivalencia de x.

Podemos dotar a $\mathbb{RP}^n$ de una topología haciendo uso del mapa π ("topología cociente").

↳ $U \subseteq \mathbb{RP}^n$ es abierto $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\pi^{-1}(U)$ abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$.

<u>Ejercicio</u>.

(i) Revisar la construcción de cartas locales presentada en las notas de S. Scott (pág 9) y mostrar que las funciones de transición son suaves.

(ii) Construir un homeomorfismo entre S^1 y $\mathbb{RP}^1$.