§5 Las ecuaciones de Hamilton

La transformada de Legendre es la herramienta principal a la hora de estudiar el paso del formalismo Lagrangiano al formalismo Hamiltoniano. En las notas de clase "Transformada de Legendre" se encuentran todos los detalles necesarios para entender la naturaleza de esta transformación, razón por la cual aquí nos limitaremos a dar tan solo un breve repaso.

Para el caso de una variable, la idea es que, comenzando con una función $x \longmapsto f(x)$, buscamos una forma de lograr ver a

$$z = f'(x) \qquad (1)$$

como la variable independiente. Se trata entonces de buscar una función $z \longmapsto \varphi(z)$ que, de existir, debería tener la misma información que la función original.

→ En la expresión (1) es evidente que x queda definida en términos de z como una función implícita.

Para saber si existe una forma de invertir (1) para obtener x como función de z (así sea tan solo localmente), hacemos uso del teorema de la función implícita.

Si definimos

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto F(x_1,x_2) := x_2 - f'(x_1), \qquad (2) \end{aligned}$$

entonces es claro que el conjunto de puntos (x,z) que satisface (1) es justo el conjunto de nivel $F^{-1}(0)$.

Del teorema de la función implícita se sigue que la condición para poder expresar x_1 como función de x_2 es que $\partial_1 F \neq 0$. Esto es equivalente a que $f'' \neq 0$, que no es otra cosa que una condición de convexidad sobre f.

Tenemos entonces:

$$f''(x) \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists \text{ función } g \text{ tal que} \qquad (3)$$
$$z = f'(g(z))$$
$$(\text{i.e. } x = g(z))$$

En este caso definimos la transformada de Legendre de f como sigue:

$$(\mathcal{L}f)(z) := z\,g(z) - f(g(z)) \qquad (4)$$

El significado geométrico de esta definición se explica en detalle en las notas "Trans. de Legendre".

El problema es similar en el caso de varias variables. Consideremos el caso general de una función de $m+n$ variables, donde usamos $x_1, \dots, x_m$ para las primeras m variables y $u_1, \dots, u_n$ para las n variables restantes:

$$F(x_1, \dots, x_m; u_1, \dots, u_n) \qquad (5)$$

Queremos reemplazar las variables $x_1, \dots, x_m$ por las respectivas derivadas.

$\longrightarrow$ "nuevas variables": $$y_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n) \qquad (6)$$
$$k = 1, \dots, m$$

Para esto procedemos de manera análoga al caso de una variable, definiendo la función

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \mathbb{R}^{2m} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (\vec{x},\vec{y}) &\longmapsto \vec{y} - \vec{\nabla}_x F(\vec{x},\vec{u}) , \end{aligned} \tag{7}$$

i.e. $\tilde{F}_k(\vec{x},\vec{y}) = y_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{x},\vec{u})$.

Aquí las variables $u_1,\dots,u_n$ son consideradas como parámetros fijos.

La matriz de derivadas de $\tilde{F}$ es

$$D\tilde{F} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{F}_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}_m}{\partial x_m} \end{matrix}}_{A_x} & \begin{matrix} \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{F}_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{F}_m}{\partial y_m} \end{matrix} \end{pmatrix} . \tag{8}$$

La condición de invertibilidad de la ec (6), es decir, la posibilidad de escribir $x_i = x_i(\vec{y},\vec{u})$, depende de que $\det A_x \neq 0$.

Pero

$$\frac{\partial \tilde{F}_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} ,$$

luego si se cumple $\mathrm{Det}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right] = 0$ entonces, por el teorema de la función implícita, tendremos que existe una función

$$\varphi : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad (9)$$
$$(y,u) \longmapsto \varphi(y,u)$$

tal que

$$y_k = \partial_k F(\varphi(y,u),u), \qquad (10)$$

es decir, tal que $x_i = \varphi_i(y,u)$.

En este caso, definimos la transformada de Legendre

$$G = \mathcal{L}F(\vec{y},\vec{u}) := \sum_{k=1}^{m} y_k \varphi_k(\vec{y},\vec{u}) - F(\varphi(\vec{y},\vec{u}),\vec{u}) \qquad (11)$$

Abusando de la notación, podemos escribir, de forma más compacta,

$$\text{“} G = \sum_k y_k x_k - F(x,u) \text{”} \qquad (12)$$

Observación:

Si x no fuera función de $\vec{y}$ y de $\vec{u}$ podríamos concluir, de la forma compacta (12), que se cumplen las siguientes relaciones:

$$(i)\ \frac{\partial G}{\partial y_k} = x_k \equiv \varphi_k \quad ,(ii)\ \frac{\partial G}{\partial u_i} = \frac{-\partial F}{\partial u_i} \qquad (13)$$

Estas relaciones en realidad se cumplen. Sin embargo, esto no sucede porque x no dependa de $\vec{u}$ ni de $\vec{y}$, sino justamente por la forma especial de su dependencia en estas variables. La importancia de las relaciones (13) i, ii radica en que a partir de ellas obtendremos las ecuaciones de Hamilton. Veamos entonces cómo se obtienen:

(i) $\longrightarrow$ Calculamos

$$\frac{\partial G}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_i y_i \varphi_i(y,u) - F(\varphi(y,u),u)\right)$$

$$= \left(\sum_i y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right) + \varphi_k(y,u) - \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}$$

$$= \sum_i \Big(\underbrace{y_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}}_{=0}\Big)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} + \varphi_k$$

$$= \varphi_k \qquad \Longrightarrow \qquad (13)\ i$$

(ii) $$\frac{\partial G}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sum_j y_j \varphi_j(y,u) - F(\varphi(y,u),u)\right)$$

$$= \sum_j y_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i} - \sum_k \frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} - \frac{\partial F}{\partial u_i}$$

$$= \sum_k \Big(\underbrace{y_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}}_{=0}\Big)\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} - \frac{\partial F}{\partial u_i}$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial u_i} \qquad \Longrightarrow \qquad (13)\ ii$$

Con esto podemos entonces realizar el cambio de $L(q,\dot{q})$ hacia $H(q,p)$.

La idea es introducir nuevas variables p_i que sean justamente las derivadas $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

La condición para poder efectuar la transformación será entonces

$$\mathrm{Det}\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \neq 0 \qquad (14)$$

Si esto sucede, entonces podemos definir

$$\boxed{H(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n) := \sum_{k=1}^{n} p_k\,\dot{q}_k(q,p) \quad - L(q,\dot{q}(q,p))} \qquad (15)$$

Las relaciones (13) i y (13) ii toman entonces la siguiente forma:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad , \qquad \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (16)$$

Si ahora usamos las ecuaciones de movimiento (Euler-Lagrange),

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}p \;,$$

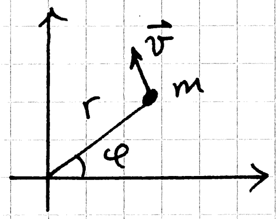
obtenemos:

<u>Ecuaciones de Hamilton</u>

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad , \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}} \qquad (17).$$

El profundo significado geométrico de estas ecuaciones no se debe pasar por alto, ya que tiene importantes consecuencias tanto en la teoría clásica (transformaciones canónicas, variables ángulo-acción, teoría de perturbaciones, sistemas dinámicos, etc..) como en la teoría cuántica.
Antes de comenzar a estudiar las propiedades de las ecs. de Hamilton consideremos un par de ejemplos sencillos.

<u>Ejemplo</u>. Partícula en un plano sujeta a una fuerza central.



$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

Lagrangiano:

$$L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \qquad (18)$$

$$\text{"}A_x\text{"} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r}^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{r}\partial\dot{\varphi}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\varphi}\partial\dot{r}} & \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\varphi}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{pmatrix}$$

↪ Transf. de Legendre existe si $(mr)^2 \neq 0$.

Queremos
$$\begin{aligned} \dot{r} &= \dot{r}(r,\varphi, p_r, p_\varphi) \\ \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}(r,\varphi, p_r, p_\varphi) \end{aligned} \qquad (19)$$

En este caso la transformación es sencilla:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \longrightarrow \dot{r} = \frac{1}{m}p_r$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{1}{mr^2}p_\varphi$$

Hamiltoniano:

$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi})$$

$$\overset{(19)}{=} \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} - \frac{1}{2}m\underbrace{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}_{= \frac{p_r^2}{m^2} + \frac{r^2 p_\varphi^2}{m^2 r^4}} + U(r)$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r) \qquad (20)$$

Ecuaciones de movimiento:

$$-\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \dot{P}_\varphi \,, \quad -\frac{\partial H}{\partial r} = \dot{P}_r \qquad \qquad 0 = \dot{P}_\varphi \,, \quad \frac{P_\varphi^2}{mr^3} - U' = \dot{P}_r$$

$$\longrightarrow$$

$$\frac{\partial H}{\partial P_\varphi} = \dot{\varphi} \,, \quad \frac{\partial H}{\partial P_r} = \dot{r} \qquad \qquad \frac{P_\varphi}{mr^2} = \dot{\varphi} \,, \quad \frac{P_r}{m} = \dot{r}$$

↳ $P_\varphi \equiv l = \text{cte}$ (momento angular).

$$\searrow \quad \frac{l^2}{mr^3} - U'(r) = \dot{P}_r$$

(21)

$$\frac{l}{mr^2} = \dot{\varphi}$$

———— // ————

Ejemplo Partícula de masa "m" y carga "e" en presencia de un campo EM.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - e\phi(q,t) + \frac{e}{c} \dot{q} \cdot A(q,t)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Rightarrow \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad \underline{\text{ok}}$$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i - \frac{e}{cm} A_i$$

P_i = "momento canónico"

$$\searrow \quad \dot{q}_i = \frac{1}{m}\left(P_i - \frac{e}{c} A_i\right)$$

$m\dot{q}_i$ = "momento cinemático"

$\Rightarrow$

$$H = \frac{1}{2m} \underbrace{\left(p - \frac{e}{c} A\right)}_{}^2 + e\phi(q,t)$$

prescripción de "acople mínimo"!

Volvamos ahora de nuevo a las ecs. de Hamilton,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

que hemos escrito en forma compacta, suprimiendo los subíndices de las coordenadas / momentos.

Si pensamos en la trayectoria que corresponde a la solución de estas ecuaciones en el espacio de fase, que estará dada por una curva $\gamma(t) = (q(t), p(t))$, vemos que tiene sentido escribir las ecs. de Hamilton de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} \leftarrow$$

El lado derecho contiene las componentes de $\vec{\nabla} H$, pero en un orden distinto, y con diferencias de signo.

Este "problema" lo podemos arreglar si usamos una matriz que multiplique a $\vec{\nabla} H$, así:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

Si definimos

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces podemos escribir las ecs de Hamilton así:

$$\dot{\gamma}(t) = J \vec{\nabla} H(\gamma(t)), \qquad (18)$$

donde $\gamma(t) = (q(t), p(t))$. Lo que esto nos está diciendo es que las trayectorias solución van en la dirección de $J \vec{\nabla} H$. Más adelante veremos que H determina un cierto campo vectorial en el espacio de fase cuyas curvas integrales son justo las trayectorias físicas.

Consideremos ahora una función f definida en el espacio de fase, $f = f(q,p)$. Nos interesa saber cómo cambia f en función del tiempo a lo largo de las curvas $\gamma(t) = (q(t), p(t))$ soluciones de las ecuaciones de Hamilton. En ese caso tenemos:

$$\dot{f} \equiv \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

Si definimos el corchete de Poisson de dos funciones f y g como la función

$$\boxed{\{f,g\} := \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right)} \quad , (19)$$

entonces podemos escribir la ec. anterior de la siguiente forma:

$$\dot{f} = \{H, f\}. \qquad (20).$$

La similitud con la ec. de movimiento en mec. cuántica en el esquema de Heisenberg,

$$-i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{H}, \hat{A}],$$

es evidente (y nada fortuita...)

Lo mismo sucede con las relaciones de conmutación canónicas, que en su versión "clásica" son las siguientes:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \qquad (21).$$

El corchete de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ y la "matriz simpléctica" J están íntimamente relacionados. Por ahora solo observaremos que si introducimos la notación $\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_n}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_n}\right)^T$, entonces se tiene que

$$(\vec{\nabla} f)^T \cdot J \cdot \vec{\nabla} g = -\{f, g\}.$$

El corchete de Lie satisface varias propiedades, que enunciamos a continuación. Su verificación se deja como ejercicio.

$\mathcal{P}$: espacio de fase

(i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$, $f, g \in C^\infty(\mathcal{P})$

(ii) $\{f, \lambda g + \mu h\} = \lambda\{f, g\} + \mu\{f, h\}$, $f, g, h \in C^\infty(\mathcal{P})$
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(iii) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

(iv) $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$.

Las propiedades (i), (ii), (iii) nos dicen que $C^\infty(\mathcal{P})$, dotado del corchete de Lie es un <u>álgebra de Lie</u>. Esto implica que, en un sentido aún por ser precisado, toda función suave en el espacio de fase actúa como un "generador infinitesimal". En el caso de H (el Hamiltoniano), esto es más evidente, ya que la ec. (20) nos permite interpretar a H como el "generador infinitesimal de traslaciones en el tiempo". La propiedad (iv) nos dice que el operador δ_f definido para $f \in C^\infty(\mathcal{P})$ como

$$\delta_f(g) := \{f, g\}$$

es una derivación. Básicamente, podemos ver la ppdad (iv) como una "regla de Leibniz".