

§4 Curvas y Superficies

Luego de nuestra primera incursión en la mecánica Lagrangiana, ha quedado claro que, de manera general, el espacio de configuración de un sistema clásico con un número finito de grados de libertad es algún tipo de "hipersuperficie" en un espacio ambiente Euclídeo de mayor dimensión.

Una vez los grados de libertad físicos han sido reconocidos, es posible dar una descripción intrínseca del espacio de configuración, ya no como una hipersuperficie "embebida" en un espacio Euclídeo de dimensión superior, sino como una "variedad diferenciable". Al describir el espacio de configuración como una variedad, veremos que la naturaleza de las "coordenadas de posición" es muy diferente de la de las "coordenadas de velocidad", queriendo decir con esto que, mientras que las coordenadas de posición representan puntos en el espacio de configuración, las coordenadas de velocidad representan vectores tangentes. Sobre cada punto q en el espacio de configuración Q (veremos) es posible definir un espacio vectorial $T_q Q$ (el espacio tangente), sobre el que estarán definidos los vectores velocidad.

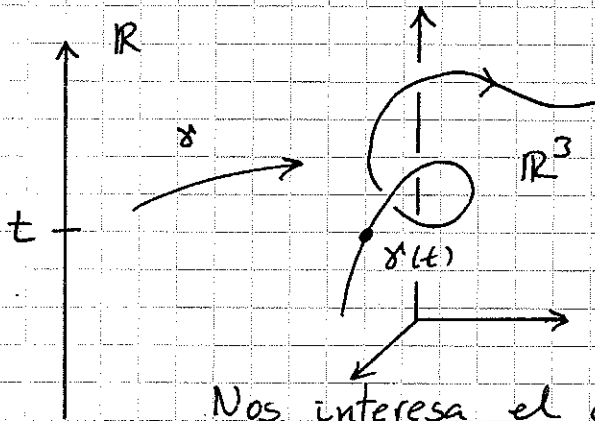
Para lograr una comprensión más profunda de la relación entre el formalismo Lagrangiano y el formalismo Hamiltoniano, será de gran utilidad estar familiarizados con la relación entre el espacio tangente y el "espacio cotangente".

Este último se obtiene a partir del primero a través de un proceso de "dualización": $T\mathbb{Q} \rightarrow (T\mathbb{Q})^*$, que estudiaremos más adelante en detalle.

Por el momento, para ganar familiaridad con el concepto de variedad, comenzaremos por dar un breve repaso de la teoría de curvas y superficies, algo que es de interés en sí mismo, con interesantes raíces históricas (que van desde los "Elementos" de Eudides hasta las geometrías no-Eudideas de Bolyai y Lobachevsky, pasando por Gauss!) y con importantes consecuencias en matemáticas (geometría diferencial y topología) y en física (relatividad general, mecánica Hamiltoniana, teorías gauge, etc.)

Comenzaremos entonces describiendo las propiedades básicas de las curvas suaves en \mathbb{R}^3 .

Curvas en \mathbb{R}^3



Consideremos una curva γ , entendida como un mapa $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, como se indica en la figura.

Nos interesa el caso en que γ es una curva suave, aunque con asumir que existan los vectores velocidad ($\dot{\gamma}(t)$), aceleración ($\ddot{\gamma}(t)$) y $\ddot{\gamma}(t)$ será suficiente.

La longitud de arco de γ para el rango $a \leq t \leq b$ se define a través de la integral siguiente:

$$\text{"longitud de arco"} : \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Físicamente, conviene pensar en el parámetro "t" que usamos para parametrizar la curva como un parámetro de tiempo. La escala que usemos para este parámetro determinará la velocidad $\dot{\gamma}(t)$ en cada t.

Sin embargo, la "traza" que deja una partícula en el espacio al recorrer la curva γ es independiente de la velocidad con que esta es recorrida. Si lo que nos importa es caracterizar algunas propiedades intrínsecas de la curva, debemos entonces buscar definiciones donde la parametrización escogida no sea de relevancia.

Otra opción es hacer uso de alguna parametrización "estándar" que permita llegar más fácilmente a dichas propiedades intrínsecas. Dicha parametrización es la que hace uso de la longitud de arco como parámetro.

↳ Reparametrización:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\underline{t})\| dt \quad \longrightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

(longitud de arco)

→ Una curva reparametrizada usando como parámetro la longitud de arco tendrá siempre velocidad de magnitud igual a 1. Veamos: dada $\gamma(t)$, definir $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$.

Entonces

$$\frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{ds/dt} = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|} \implies \|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1.$$

Def. Para una curva $\gamma(s)$ parametrizada con longitud de arco ($\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$), se define la curvatura como "la magnitud de la aceleración":

$$k(s) := \|\ddot{\gamma}(s)\|$$

- Para una recta, $k = 0$
- Para un círculo de radio R , $k = \frac{1}{R}$

Observación

Si $\gamma(t)$ es una curva que no es de velocidad unitaria, se puede calcular k sin necesidad de reparametrizar con longitud de arco. El resultado es (ejercicio!):

$$k = \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

Def. Vector tangente unitario / vector normal unitario

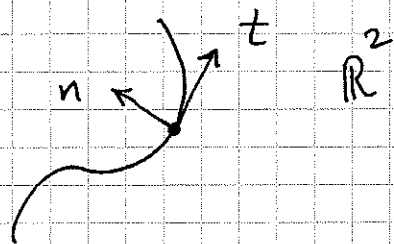
Para γ parametrizada con long. de arco, definimos 2 vectores unitarios, de la siguiente forma:

• V. tangente unitario t : $t := \dot{\gamma}(s)$

• V. normal unitario n : $\ddot{\gamma}(s) = k_s n$,

donde $|k_s| = k$. k_s es igual, salvo un signo, a la curvatura definida arriba. La ambigüedad en la orientación de n se puede resolver imponiendo la condición de que t, n y $t \times n$ forman una base con orientación positiva en \mathbb{R}^3 (regla de la mano derecha)

Si $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, con t y n tenemos una base local (marco móvil) en \mathbb{R}^2 :



Para curvas $\gamma(s)$ en \mathbb{R}^3 , añadimos un tercer vector, y junto con este definimos la torsión.

Asumiendo que en la región de interés $\kappa \neq 0$, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} t(s) &= \dot{\gamma}(s) \\ n(s) &= \frac{1}{\kappa(s)} \dot{t}(s) \end{aligned} \right\} \text{de las definiciones anteriores}$$

$$b(s) := t(s) \times n(s) \leftarrow \text{def. de } b.$$

Observemos que como t y n son unitarios, también b debe serlo.

Esto, a su vez, implica que \dot{b} debe ser proporcional a n .

Veamos:

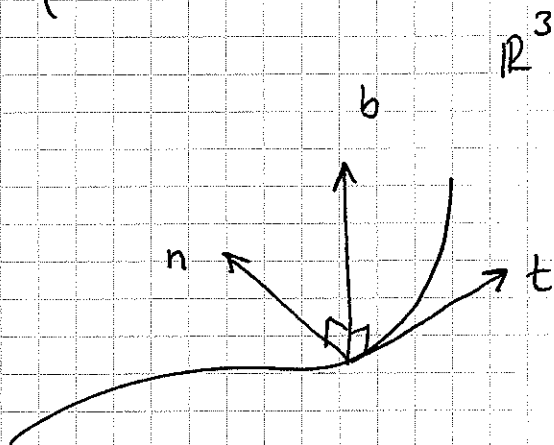
Está claro que $\{t, n, b\}$ forma una base ortonormal.

Como b es unitario, se debe tener $b \cdot \dot{b} = 0$.

Además,

$$\dot{b} \cdot t = \frac{d}{ds} (t \times n) \cdot t = \underbrace{(t \times \dot{n}) \cdot t}_{=0} + \underbrace{(\dot{t} \times n) \cdot t}_{=0} = 0 + \kappa(n \times n) \cdot t = 0$$

$\rightarrow \dot{b}$ es perpendicular a t y a b , luego debe ser (anti-)paralelo a n : $\dot{b} \parallel n$



→ Definimos la torsión τ a partir de

$$\dot{b} = -\tau n.$$

Ejercicio: mostrar que para una curva regular $\gamma = \gamma(t)$ (no necesariamente parametrizada con longitud de arco), la torsión se puede expresar de la siguiente forma:

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}$$

Tenemos, por definición, que $\dot{t} = \kappa n$ y $\dot{b} = -\tau n$.

Calculemos \dot{n} :

Tenemos

$$t \times n = b, \quad n \times b = t, \quad b \times t = n$$

Usemos esa información:

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \dot{b} \times t + b \times \dot{t} = -\tau(n \times t) + \kappa(b \times n) \\ &= \tau b - \kappa t \end{aligned}$$

Escribiendo las 3 expresiones, obtenemos las ecuaciones de Frenet-Serret:

\dot{t}	=	κn
\dot{n}	=	$-\kappa t + \tau b$
\dot{b}	=	$-\tau n$

También podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial \rightarrow

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

Lo interesante de la torsión τ y la curvatura κ es que son las únicas cantidades que necesitamos para reconstruir la forma ("shape") de una curva dada.

Esto debido a que τ y κ entran como coeficientes en las ecs. de Frenet-Serret, que son ecs. de primer orden para t, n, b . Una vez conozcamos estos vectores como funciones del parámetro s , podemos reconstruir la curva, dado un conjunto apropiado de condiciones iniciales.

Una forma alternativa de obtener estas ecuaciones consiste en aplicar el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt al conjunto de vectores $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma}$. Esto da lugar a la posibilidad de una generalización al caso de curvas $t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$.

Superficies en \mathbb{R}^3

Podemos describir una superficie en \mathbb{R}^3 a través de una parametrización

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto \sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

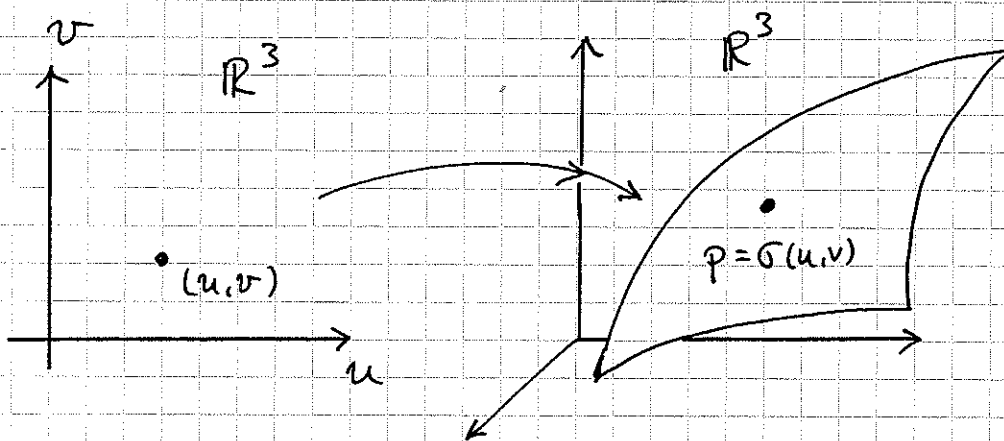
En general, dichas parametrizaciones serán locales, de tal forma que el dominio de σ será tan solo algún

conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Para asegurar la existencia del plano tangente en cada punto, nos restringimos a parametrizaciones regulares, i.e., tales que

$$\sigma_u \times \sigma_v \neq 0,$$

donde $\sigma_u := \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$, $\sigma_v := \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$.



Ejemplo: La esfera unitaria S^2

Podemos parametrizar la esfera de la siguiente forma:

$$(x, y, z) = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta) \equiv \hat{r}$$

$$\rightarrow \sigma(\theta, \varphi) = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta).$$

Entonces

$$\sigma_\theta = (\cos\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$\sigma_\varphi = (-\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos\varphi, 0)$$



$$\begin{aligned} \sigma_\theta \times \sigma_\varphi &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\sin^2\theta \cos\varphi, \sin^2\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos\theta) \\ &= \sin\theta \hat{r} \neq 0 \\ &\quad (\text{para } \theta \neq 0, \pi!) \end{aligned}$$

Sobre una superficie regular podemos definir el plano tangente o, de forma equivalente, el vector normal unitario:

$$\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto \sigma(u, v) \equiv p \quad \rightsquigarrow T_p S := \text{span}\{\sigma_u, \sigma_v\}$$

$$\equiv (N_p)^\perp$$

$$\sigma(U) \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^3$$

↑
superficie

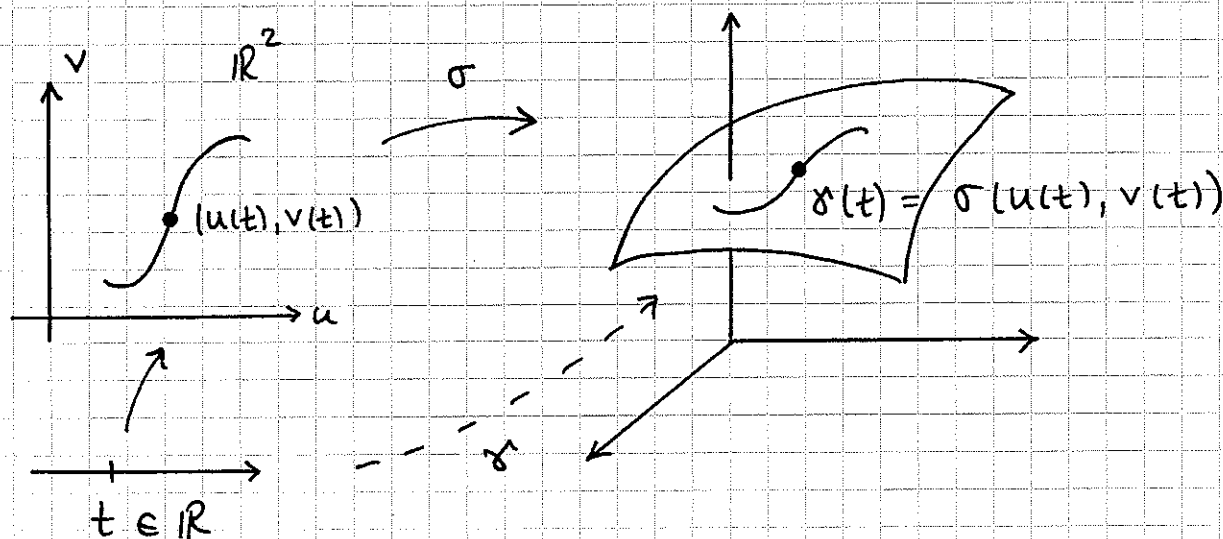
Def. Vector normal unitario

$$\hat{N}_\sigma := \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$$

Observación.

Dos parametrizaciones locales σ y $\tilde{\sigma}$ darán lugar a vectores normales unitarios \hat{N}_σ y $\hat{N}_{\tilde{\sigma}}$ que a lo sumo difieren en un signo. Para superficies orientables se puede escoger un recubrimiento para el cual sobre las regiones de intersección los vectores normales unitarios coinciden. Esto no es posible en superficies no orientables (esta condición se puede, de hecho, tomar como la definición de orientabilidad).

Consideremos ahora curvas sobre superficies:



Para obtener la longitud de arco (comenzando en t_0), calculamos:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\lambda)\| d\lambda$$

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda) = \sigma(u(\lambda), v(\lambda)) &\rightarrow \dot{\gamma}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \sigma(u(\lambda), v(\lambda)) \\ &= \sigma_u \frac{du}{d\lambda} + \sigma_v \frac{dv}{d\lambda} \\ &\equiv \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \|\dot{\gamma}(\lambda)\|^2 &= (\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}, \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}) \quad "(,)" : \text{Producto interior (Euclideo) en } \mathbb{R}^3 \\ &= (\sigma_u, \sigma_u) \dot{u}^2 + 2(\sigma_u, \sigma_v) \dot{u} \dot{v} + (\sigma_v, \sigma_v) \dot{v}^2 \\ &\equiv E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2,\end{aligned}$$

donde hemos definido:

$$E := (\sigma_u, \sigma_u), \quad F := (\sigma_u, \sigma_v), \quad G := (\sigma_v, \sigma_v).$$

Para la longitud de arco obtenemos, por lo tanto,

$$s(t) = \int_{t_0}^t (E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2)^{1/2} d\lambda.$$

La longitud de arco infinitesimal, elevada al cuadrado, da lugar a una expresión diferencial, conocida como la "Primera Forma Fundamental"

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

Ejemplo: Para la esfera S^2 , tenemos:

$$\sigma_\theta = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta), \quad \sigma_\varphi = (-\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos\varphi, 0)$$



$$E = (\sigma_\theta, \sigma_\theta) = \cos^2\theta \cos^2\varphi + \cos^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta = 1$$

$$F = (\sigma_\theta, \sigma_\varphi) = 0$$

$$G = (\sigma_\varphi, \sigma_\varphi) = \sin^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta \cos^2\varphi = \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

Observación:

La primera forma fundamental, básicamente, corresponde a la estructura métrica que "hereda" la superficie de parte del producto interior Euclídeo en \mathbb{R}^3 , a través de la parametrización σ .

De esta forma, si $\vec{x} = x_u \sigma_u + x_v \sigma_v$ y $\vec{y} = y_u \sigma_u + y_v \sigma_v$ son dos vectores tangentes a S en $p = \sigma(u, v)$, su producto interior se puede escribir en términos de la 1era forma fundamental, así:

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{y})_p &= (x_u \sigma_u + x_v \sigma_v, y_u \sigma_u + y_v \sigma_v) \\ &= x_u y_u E + (x_u y_v + x_v y_u) F + x_v y_v G \\ &= (x_u, y_u) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_u \\ y_v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vemos entonces que sobre cada espacio tangente $T_p S$, $p = \sigma(u, v)$, tenemos definida una forma bilineal simétrica (de hecho, un producto interior), que en la base $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ toma la forma

$$T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{x}, \vec{y} \longmapsto \vec{x}^t g \vec{y}, \text{ con } g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Otra notación que usaremos, siguiendo Pressley ("Elementary Differential Geometry"), será

$$F_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \leftarrow \text{Primera forma fundamental.}$$

► Isometrías:

Un mapa suave $f: S_1 \rightarrow S_2$ entre dos superficies se denomina isometría si este lleva cualquier curva en S_1 a una curva en S_2 de la misma longitud.

Si esto solo sucede a nivel local, hablamos acerca de una isometría local.

Bajo ciertas condiciones (f difeomorfismo local) es posible mostrar (cf. Pressley, corolario 6.2.3) que una condición equivalente para que f sea una isometría es que si σ es una parametrización de S_1 entonces las primeras formas fundamental de σ y de $f \circ \sigma$ coincidan.

► Área de una superficie:

Es intuitivamente claro que para calcular el área de una región dada $\sigma(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, sobre una superficie debemos usar

$$A_\sigma(U) = \int_U \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\text{Det}g},$$

de tal forma que el área se puede expresar como

$$A_\sigma(u) = \int_u \sqrt{\text{Det}g} \cdot \text{vol},$$

con "vol" = $du dv$, representando el elemento de "volumen" (en este caso área) del espacio de parámetros.

Bajo reparametrizaciones, las componentes de la primera forma fundamental cambian:

Si $\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v})$ es una reparametrización de $\sigma(u, v)$, entonces

$$\tilde{g} = J^t g J,$$

donde J es el Jacobiano de la transformación. De aquí se sigue que el área de una región, calculada usando la fórmula para $A_\sigma(u)$ dada arriba, no depende de la reparametrización.

Curvatura

Para una curva $\gamma(s)$ (parametrizada con longitud de arco), se ha definido κ a través de

$$t = \dot{\gamma}, \quad \ddot{\gamma} = \dot{t} = \kappa n, \quad \text{donde } n \text{ es unitario.}$$

La curvatura κ nos da una idea de qué tanto la curva se "aleja" de una línea recta.

Esto lo podemos hacer de la siguiente manera \rightarrow

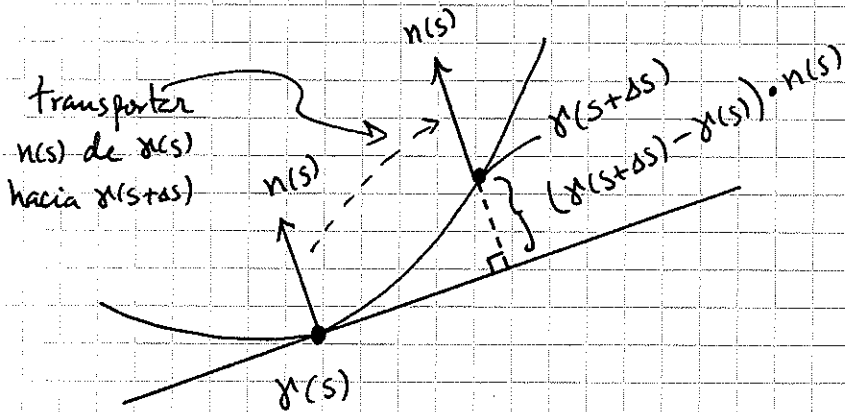
Usando una expansión de Taylor a orden 2:

$$\gamma(s + \Delta s) = \gamma(s) + \dot{\gamma}(s) \Delta s + \frac{\ddot{\gamma}(s)}{2} (\Delta s)^2 + O(\Delta s^3)$$

Entonces

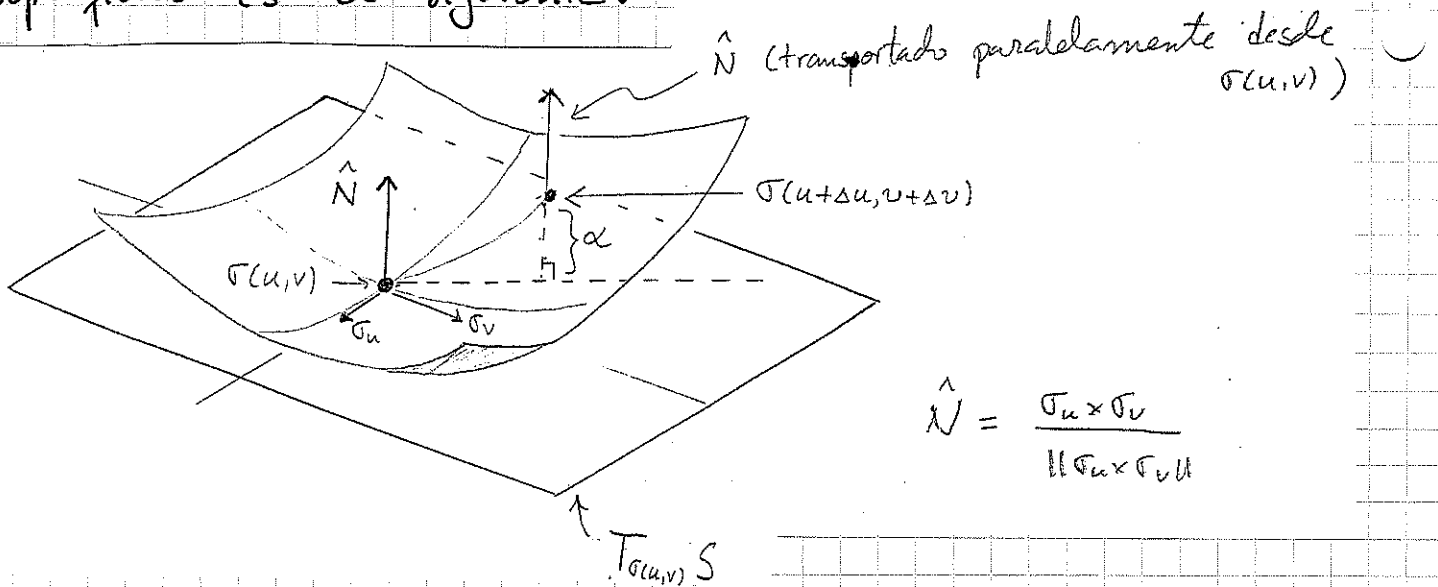
$$\begin{aligned}
 (\gamma(s+\Delta s) - \gamma(s)) \cdot n(s) &\approx \left(\dot{\gamma} \Delta s + \frac{\ddot{\gamma}}{2} (\Delta s)^2 \right) \cdot n \\
 &= 0 + \frac{1}{2} \kappa (\Delta s)^2
 \end{aligned}$$

El significado geométrico de esta cantidad es evidente en la siguiente figura:



La misma idea se puede aplicar al caso de superficies:

Buscamos una forma de medir qué tanto una superficie se "aleja" de su plano tangente a medida que nos movamos sobre ella. El dibujo que generaliza el caso de curvas al de superficies es el siguiente:



$$\hat{N} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$$

Queremos estimar α :

Lo hacemos calculando $(\sigma(u+\Delta u, v+\Delta v) - \sigma(u, v)) \cdot \hat{N}$

Usando una expansión de Taylor a segundo orden y el hecho de que $\sigma_u \perp \hat{N}$ y $\sigma_v \perp \hat{N}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} (\sigma(u+\Delta u, v+\Delta v) - \sigma(u, v)) \cdot \hat{N} &\approx \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\sigma_{uu} \cdot \hat{N} (\Delta u)^2 + 2\sigma_{uv} \cdot \hat{N} \Delta u \Delta v + \sigma_{vv} \cdot \hat{N} (\Delta v)^2 \right) \end{aligned}$$

Si definimos

$$L := \sigma_{uu} \cdot \hat{N}, \quad M := \sigma_{uv} \cdot \hat{N}, \quad N := \sigma_{vv} \cdot \hat{N},$$

entonces la expresión anterior toma la forma

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left(L (\Delta u)^2 + 2M \Delta u \Delta v + N (\Delta v)^2 \right)$$

o, en forma matricial,

$$\alpha \approx \frac{1}{2} (\Delta u, \Delta v) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

La expresión

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

se conoce como la segunda forma fundamental.

La (matriz de la) segunda forma fundamental se escribe como sigue:

$$F_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

Claramente, los coeficientes L, M, N en F_{II} tienen información

acerca de la curvatura de la superficie.

Vale la pena analizar este punto en algo de detalle.

→

Intuitivamente es claro que, dada una curva γ sobre una superficie S , siempre podremos descomponer el vector de aceleración $\ddot{\gamma}$ en una componente normal a la superficie (y por lo tanto proporcional al vector normal unitario $\hat{N} = \sigma_u \times \sigma_v / \|\sigma_u \times \sigma_v\|$) más una componente sobre el plano tangente.

Si $\|\dot{\gamma}\| = 1$, entonces $\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = 0$, así que $\ddot{\gamma}$ está en el plano perpendicular a $\dot{\gamma}$. Pero $\hat{N} \cdot \dot{\gamma} = 0$, luego \hat{N} está en dicho plano. Como $\hat{N} \times \dot{\gamma}$ también es perpendicular a ese plano, vemos que cualquier vector que sea perpendicular a $\dot{\gamma}$ se puede escribir como combinación lineal de \hat{N} y $\hat{N} \times \dot{\gamma}$.

Debemos tener, por lo tanto,

$$\ddot{\gamma} = k_n \hat{N} + k_g \hat{N} \times \dot{\gamma},$$

para ciertos escalares k_n y k_g que llamaremos "curvatura normal" y "curvatura geodésica", respectivamente.

De la definición se sigue inmediatamente que

$$k_n = \ddot{\gamma} \cdot \hat{N}, \quad k_g = \ddot{\gamma} \cdot (\hat{N} \times \dot{\gamma})$$

Vemos que, adicionalmente, se tiene

$$K^2 = k_n^2 + k_g^2, \quad \text{donde } K = \|\ddot{\gamma}\|.$$

En términos físicos, tenemos la siguiente interpretación de las dos curvaturas:

Suponiendo que en ausencia de cualquier fuerza externa una partícula puntual se moviera sobre la superficie S , tendríamos que $m\ddot{\mathbf{x}}$ sería únicamente proporcional a la fuerza de reacción que, como hemos visto, debe ser normal a la superficie (ppio D'Alembert).

De esta forma tendríamos:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \underbrace{m k_n}_{\text{"fuerza de reacción"}} \hat{\mathbf{N}},$$

así que k_n es una cantidad (depende de la forma de la "superficie de restricción / ligadura" S) que da una idea de la intensidad de la fuerza de reacción.

k_n también se vería afectada en caso de que existiera alguna fuerza externa que fuera siempre perpendicular a la superficie!

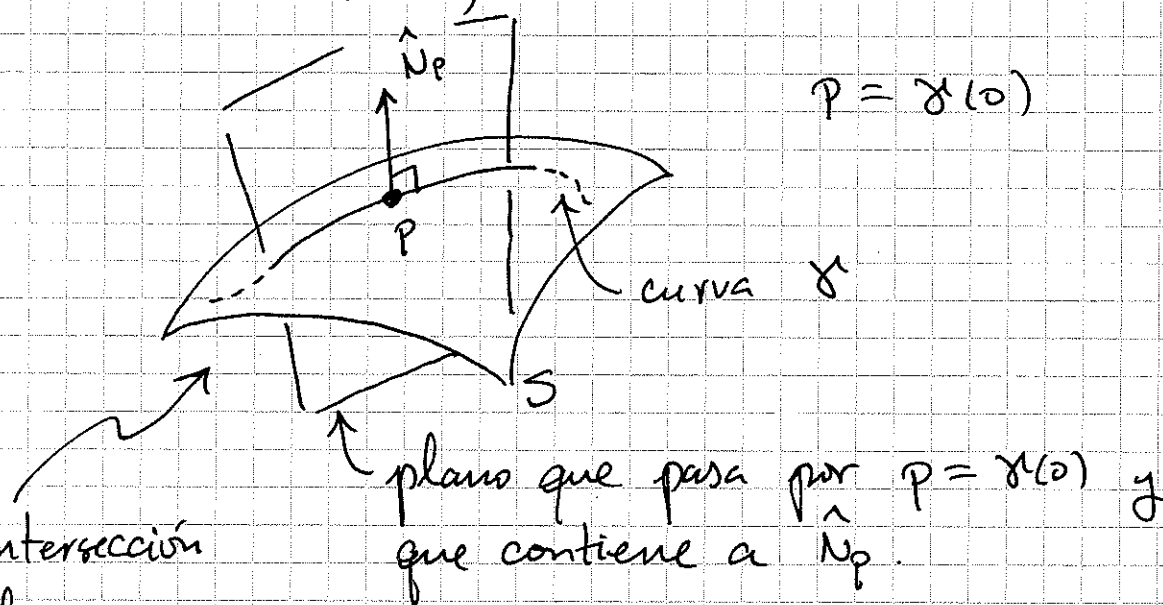
En cualquiera de estos 2 casos, lo que es cierto es que la componente tangencial del vector de aceleración ($\ddot{\mathbf{x}}$) será cero.

Desde el punto de vista de la partícula, esto quiere decir que no hay fuerzas que la desvíen de lo que parece ser la trayectoria "más recta" dentro de S .

→ Cualquier fuerza que sea tangente a la superficie generará una componente a lo largo de $(\hat{\mathbf{N}})^\perp$, lo cual desviaría a la partícula de dicha trayectoria "recta".

Para definir adecuadamente la curvatura de una superficie nos interesa solamente considerar curvas γ que corresponden a "movimiento sin fuerzas tangentes a S ", es decir, tales que $k_g = 0$.

Dichas curvas son secciones normales, en el sentido de alrededor de cada punto $p \in S$ se pueden obtener (aproximar!) como la intersección de S con un plano (2D) que pasa por el punto p y que contiene al vector normal unitario, \hat{N} :



La intersección del plano con S permite aproximar

localmente a una curva γ tal que en $p = \gamma(0)$ se tenga $k_g = 0$.

Cuando $k_g = 0$ tenemos, por lo tanto, $K = \pm K_n$

→ curvatura normal y curvatura coinciden, salvo un posible signo.

Ahora bien, para una curva $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ con $\|\dot{\gamma}\| = 1$, se tiene:

$$K_n = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2$$

La demostración se sigue de un cálculo sencillito:

$$\begin{aligned} K_n &= \hat{N} \cdot \ddot{\gamma} = \hat{N} \cdot \frac{d}{dt} \dot{\gamma} = \hat{N} \cdot \frac{d}{dt} (\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}) \\ &= \hat{N} \cdot (\sigma_{uu} \dot{u} + \sigma_{vv} \dot{v} + (\sigma_{uv} \dot{u} + \sigma_{vu} \dot{v}) \dot{u} + (\sigma_{vu} \dot{u} + \sigma_{uv} \dot{v}) \dot{v}) \\ &= 0 + 0 + (\hat{N} \cdot \sigma_{uu}) \dot{u}^2 + 2(\hat{N} \cdot \sigma_{uv}) \dot{u}\dot{v} + (\hat{N} \cdot \sigma_{vv}) \dot{v}^2 \\ &= L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2 \end{aligned}$$

→ Para una curva dada $\gamma(t)$ que cumpla la condición $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$, se tiene que la curvatura normal está dada por

$$K_n = (\dot{u}, \dot{v}) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = (\dot{u}, \dot{v}) \gamma_{\text{II}} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

Cabe preguntarse entonces, en qué dirección debe apuntar el vector $\dot{\gamma}$ ($\|\dot{\gamma}\|$ es cte!) de tal forma que K_n asuma su valor máximo / mínimo?

Está claro que este problema debe tener solución, ya que cada escogencia de una "dirección" de $\dot{\gamma}$ corresponde a la escogencia de un plano como el de la figura anterior. Al rotar dicho plano alrededor del vector \hat{N} , obtenemos todas las posibles direcciones. Sea ϕ el ángulo en que hemos rotado el plano a partir de su posición inicial.

Los valores independientes que puede asumir ϕ están en el intervalo $[0, \pi]$, donde $\phi = 0$ y $\phi = \pi$ dan lugar (por supuesto) al mismo plano.

Vemos entonces que K_u es una función (continua) de ϕ : $K_u = K_u(\phi)$.

Pero es un resultado elemental del cálculo que toda función continua definida sobre un compacto (en este caso: un conjunto cerrado y acotado) alcanza siempre su máximo y mínimo.

En principio, entonces, todo lo que tenemos que hacer es resolver la ecuación $\frac{dK_u}{d\phi} = 0$.

Sin embargo, lo que tenemos es una fórmula para K_u en términos de \dot{u} y \dot{v} .

Los valores posibles de \dot{u} y \dot{v} están restringidos por la condición $\|\dot{\gamma}\| = 1$.

Por lo tanto, resulta conveniente plantear el problema como un problema de extremización de una función, sujeta a restricciones.

Sea Q la función definida por $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 = \dot{u}, x_2 = \dot{v} \\ \vec{x} = (x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \mapsto Q(\vec{x}) := \vec{x}^T \mathbb{F}_{II} \vec{x}$$

$$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Sea $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{x} \mapsto g(\vec{x}) := \vec{x}^T \mathbb{F}_I \vec{x}$$

$$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar los extremos (máximo y mínimo) de la función Q , sujeta a la restricción $g \equiv 1$.

Nótese que esto es equivalente, al tomar

$\vec{x} = (x_1, x_2) = (\dot{u}, \dot{v})$, a encontrar los puntos extremos de $K_n = (\dot{u}, \dot{v}) F_{II} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$, con la condición de que $\|\dot{\gamma}\|^2 = 1$, i.e., de que $\|\dot{\gamma}\|^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 = 1$.

Haciendo uso de un multiplicador de Lagrange λ , introducimos la función

$$H(\vec{x}, \lambda) := Q(\vec{x}) + \lambda(1 - g(\vec{x})).$$

Queremos resolver $\vec{\nabla} H \stackrel{!}{=} 0$.

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} H = (\vec{\nabla} Q - \lambda \vec{\nabla} g, 1 - g(\vec{x})).$$

Pero $\vec{\nabla} Q = 2 F_{II} \vec{x}$ y $\vec{\nabla} g = 2 F_I \vec{x}$,

luego los extremos \vec{x} son solución de

$$(F_{II} - \lambda F_I) \vec{x} = 0 \quad (*)$$

Supongamos que hemos encontrado una solución λ, \vec{x} a (*). ¿Cuánto vale K_n ?

$$\begin{aligned} \hookrightarrow K_n &= Lx_1^2 + 2Mx_1x_2 + Nx_2^2 = \vec{x}^T F_{II} \vec{x} \\ &\stackrel{(*)}{=} \vec{x}^T \lambda F_I \vec{x} = \lambda g(\vec{x}) = \lambda \end{aligned}$$

$\rightarrow \lambda$: curvatura máxima / mínima

Def Las raíces de (*) se denominan curvaturas principales, y las denotamos con k_1 y k_2 .

Como $(F_{II} - \lambda F_I) \vec{x} = 0$ y F_I es invertible, tenemos que $(F_I^{-1} F_{II}) \vec{x} = \lambda \vec{x}$, luego las curvaturas principales son justamente los valores propios de $F_I^{-1} F_{II}$

Definimos también la curvatura media

no confundir con la función H de la pág anterior! $\rightarrow H := \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(F_I^{-1} F_{II})$

y la curvatura Gaussiana:

$$K := k_1 k_2 = \text{Det}(F_I^{-1} F_{II}) \equiv \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Theorema Egregium (Gauss)

La curvatura Gaussiana K de una superficie es invariante bajo isometrías locales.

Observación.

Entre otras cosas, el "theorema Egregium" implica que la curvatura Gaussiana es una propiedad intrínseca de una superficie, por lo cual puede ser calculada por un "ser" que viva en la superficie, a partir de mediciones locales, que no hagan referencia alguna al espacio exterior.