

§3. Mecánica Lagrangiana - I

El Principio de Hamilton

Consideremos un sistema descrito por coordenadas generalizadas

$$q_1, q_2, \dots, q_n.$$

Sea $q_i(t)$ una trayectoria cualquiera. Denotaremos con $\dot{q}_i(t)$ a la derivada de $q_i(t)$ respecto a t .

Sin embargo, en algunas ocasiones usaremos la notación

$$(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

para denotar un punto en el espacio de "configuraciones + velocidades", sin que necesariamente hagamos referencia a una trayectoria $t \mapsto q(t)$.

El principio de Hamilton afirma que la dinámica del sistema está determinada por una función

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

(el Lagrangiano), de tal forma que las trayectorias $q_i(t)$ que corresponden a la evolución temporal del sistema extremizan el funcional ($q \equiv (q_1, \dots, q_n)$)

$$I[q] := \int_{t_0}^{t_f} L(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), t) dt$$

Las condiciones de frontera $q_i(t_0) = a_i$ y $q_i(t_f) = b_i$ se asumen como dadas. Tenemos entonces:

Ppio. de Hamilton: $\delta I[q] = 0$ para trayectorias físicas.

Siendo este un principio variacional, obtenemos como consecuencia que las trayectorias físicas $q_i(t)$ deben satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i=1, \dots, n$$

Ejemplo

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(q), \quad \text{donde } q = (q_1, \dots, q_n) \text{ y } U(q)$$

es la función de energía potencial

Ecs. E-L:

$$\frac{d}{dt} m \dot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad \longrightarrow \quad m \ddot{q} = - \vec{\nabla} U$$

(2da ley Newton).

Ya habíamos obtenido este resultado a partir del principio de D'Alembert. Sin embargo, es importante resaltar el hecho de que el principio de Hamilton es un primer paso hacia una formulación general de la mecánica clásica que nos permitirá, entre muchas otras cosas, entender a profundidad la relación entre simetrías y leyes de conservación.

Los principios que estudiaremos proveen también una base conceptual para la comprensión de la teoría cuántica.

Transformaciones gauge del Lagrangiano.

Las ecuaciones de movimiento no se ven afectadas si el Lagrangiano es modificado de la siguiente forma:

$$L(q, \dot{q}) \quad \longrightarrow \quad L'(q, \dot{q}) := L(q, \dot{q}) + \frac{d}{dt} M(q, t),$$

donde $M(q, t)$ es una función diferenciable de las variables de posición y tiempo.

Para ver que las ecuaciones de movimiento permanecen invariantes, apliquemos el "operador" $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}$ a $L' - L = \frac{d}{dt} M(q, t)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \left(\frac{d}{dt} M(q, t) \right) &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M}{\partial t} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial^2 M}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \frac{\partial^2 M}{\partial q_i \partial t} \\ &= \frac{\partial^2 M}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^2 M}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \frac{\partial^2 M}{\partial q_i \partial t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo. Partícula cargada, en un campo electromagnético.

Las ecuaciones de Maxwell (en unidades Gaussianas) son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Como es bien conocido, los campos \vec{E} y \vec{B} pueden ser descritos en términos de potenciales ϕ, \vec{A} , así:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Estos potenciales no son únicos: los campos \vec{E} y \vec{B} permanecen invariantes bajo una transformación "gauge" de la forma

$$\begin{aligned}\vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}.\end{aligned}\quad (*)$$

La dinámica de una partícula de carga e y masa m en presencia de campos \vec{E} y \vec{B} (externos) puede ser descrita por el siguiente Lagrangiano (ejercicio: verificar esta afirmación):

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e\phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Es fácil verificar (ejercicio) que el efecto de una transformación de la forma (*) sobre el Lagrangiano es la siguiente:

$$L \rightarrow L' = L + \frac{d}{dt} \left(\frac{e}{c} \chi \right).$$

————— // —————

- Es interesante observar que existen transformaciones más generales del Lagrangiano que pueden ser también consideradas transformaciones gauge, ya que dejan invariantes las ecuaciones de movimiento. El siguiente ejemplo ilustra dicha situación.

Ejemplo.

Considerar, como espacio de configuración, el siguiente conjunto:

$$Q = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Para una partícula que se mueve en Q y cuya dinámica está determinada por un Lagrangiano $L(q, \dot{q})$, $q = (q_1, q_2) \in Q$,

consideremos la siguiente transformación:

$$L(q, \dot{q}) \mapsto L'(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + F(q) \cdot \dot{q}, \quad (**)$$

Para donde la función F se define como

$$F: \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$q = (q_1, q_2) \longmapsto (F_1(q), F_2(q)) = \frac{1}{2} \left(\frac{-q_2}{q_1^2 + q_2^2}, \frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2} \right).$$

Para ver que $(**)$ puede ser considerada una transformación gauge, realizamos el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \right) (F(q) \cdot \dot{q}) &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \right) \left(\frac{-q_2 \dot{q}_1 + q_1 \dot{q}_2}{2(q_1^2 + q_2^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{-q_2 \dot{q}_1}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{q_1 \dot{q}_2}{q_1^2 + q_2^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{-q_2 \dot{q}_1}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{q_1 \dot{q}_2}{q_1^2 + q_2^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{-q_2}{q_1^2 + q_2^2} \right) + \frac{q_2 \dot{q}_1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{q_1^2 + q_2^2} \right) - \frac{\dot{q}_2}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2} \right) \\ &= \frac{(q_1^2 + q_2^2)^{-2}}{2} \left[-\dot{q}_2 (q_1^2 + q_2^2) + 2q_1 q_2 \dot{q}_1 + 2q_2^2 \dot{q}_2 - 2q_1 q_2 \dot{q}_1 - \dot{q}_2 (q_1^2 + q_2^2 - 2q_1^2) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tomando derivadas respecto a q_2 y \dot{q}_2 obtenemos el mismo resultado.

Nótese que $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 0$, luego $(\text{rot } F)_3 = 0$.

Vemos, por lo tanto, que en lugar de añadir un diferencial exacto (dM/dt) al Lagrangiano, también podemos añadir un diferencial inexacto $F \cdot \dot{q}$ ($\text{rot } F = 0$ siendo una condición que se debe pedir)

Más adelante veremos la diferencia entre formas diferenciales exactas y cerradas (este ejemplo ilustra la diferencia). Veremos también cómo, al cuantizar un sistema clásico del mismo tipo de $Q = \mathbb{R}^2 \cdot \mathbb{Z}_2$, esta diferencia nos obliga a tomar en cuenta la topología del espacio de configuración.

Observación

El hecho de que dos Lagrangianos que difieren en una transformación gauge den lugar a las mismas ecuaciones de movimiento, deja en claro que no es correcto asociar un solo Lagrangiano a un sistema físico dado. En particular, la prescripción " $L = T - U$ " no es la única posible.

Un ejemplo muy ilustrativo es el del oscilador armónico en una dimensión:

Por un lado tenemos $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$, que da lugar a la ec. de movimiento $\ddot{q} = -\omega^2 q$.

Sin embargo, también podemos considerar el Lagrangiano

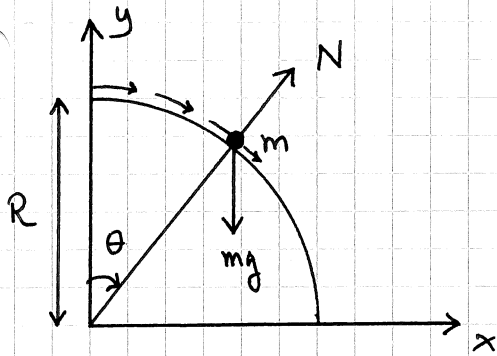
$$L' = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + q \dot{q} - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2,$$

que lleva a la misma ecuación de movimiento.

Habría que preguntarse, entonces: El término $q \dot{q}$ hace parte de la energía cinética, o de la energía potencial?

Claramente, L y L' están relacionados por una transf. gauge, ya que $q \dot{q} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (q^2)$.

Ligaduras



Consideremos el problema "clásico" de una bolita de masa m que se desliza libremente, partiendo del reposo, desde la parte superior de una superficie esférica. El problema consiste en encontrar el valor θ^* del ángulo θ para el cual la bolita justo se desprende de la superficie.

Aunque este problema puede ser resuelto muy fácilmente con los métodos elementales de la física general, también es cierto que resulta ser muy útil para introducir ligaduras en el contexto de la mecánica Lagrangiana.

Comencemos por recordar la solución "estándar":

- Para la fuerza centripeta, tenemos:

$$mg \cos \theta - N = \frac{mv^2}{R} \quad (1)$$

- Conservación de energía:

$$mgR = mgR \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

- La bolita se despegar de la superficie cuando $N=0$. Esta condición, junto con (1) y (2), determina el valor de θ^* , que resulta ser

$$\cos \theta^* = 2/3.$$

Resolvamos nuevamente el problema, usando el ppio de D'Alembert:

- Ligadura: $x^2 + y^2 = R^2$ (en realidad, \geq)

- 2da ley: $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N}$ fuerza de reacción.

$\hookrightarrow f(x,y) := x^2 + y^2 - R^2$, luego $\vec{\nabla}f \cdot \dot{\vec{r}} = 0$ } $\vec{N} = \lambda \vec{\nabla}f$.

D'Alembert: $\vec{N} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \longrightarrow$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda \vec{\nabla}f.$$

Siguiendo la misma idea de §1, tenemos:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}f = m\vec{g} \cdot \vec{\nabla}f + \lambda \|\vec{\nabla}f\|^2$$

$$\vec{\nabla}f \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) = \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right]}_{= 2\dot{x}_i} \dot{x}_i + \vec{\nabla}f \cdot \ddot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}f \cdot \ddot{\vec{r}} = -2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\Rightarrow -2m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2m\vec{g} \cdot (x,y) + 4\lambda(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{m}{2R^2} (gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2).$$

Comparando con (1) vemos que $\lambda \stackrel{!}{=} 0$ determina la condición de que la bolita se desprenda.

Las ecs. de movimiento, en términos de las coord. x, y :

$$\ddot{x} = \frac{x}{R} (gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2) \quad (3)$$

$$\ddot{y} = \frac{y}{R} (gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2) - g.$$

Para obtener θ^* , partimos de $\lambda \stackrel{!}{=} 0$ y usamos conservación de energía.

Algo que equivale a usar conservación de energía es integrar las ecs. de mov. (3), lo cual resulta más fácil de hacer si pasamos a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \\ y &= R \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{ver figura!})$$

Las ecs. de mov. (3), se muestra fácilmente, toman la siguiente forma:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta \quad (4)$$

Por otro lado, el multiplicador λ toma la forma

$$\lambda = \frac{m}{2} \left(\frac{g}{R} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \right)$$

Haciendo uso de la identidad $\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \dot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta}$,

podemos integrar (4):

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \int \ddot{\theta} d\theta \stackrel{(4)}{=} \frac{g}{R} \int_0^{\theta} \sin \theta d\theta = \frac{g}{R} (1 - \cos \theta).$$

(hemos hecho uso de las condiciones iniciales).

Reemplazando el resultado en la expresión de arriba para λ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{m}{2} \left(\frac{g}{R} \cos \theta - 2 \frac{g}{R} (1 - \cos \theta) \right) \\ &= \frac{mg}{R} (3 \cos \theta - 2) \Rightarrow \lambda = 0 \text{ para } \cos \theta = 2/3. \end{aligned}$$

Volvamos ahora de nuevo a la ecuación de movimiento, en la forma

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda\vec{\nabla}f.$$

En el caso general de un sistema con ligaduras (holon + escl) y sujeto a fuerzas externas conservativas, la ecuación de movimiento se puede expresar en términos de la energía potencial:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}U + \lambda\vec{\nabla}f.$$

Ahora bien, como λ es una "constante"^(*), podemos reescribir la ecuación de movimiento en la siguiente forma:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}(U - \lambda f).$$

El valor de este razonamiento heurístico es enorme, ya que nos dice cómo incluir ligaduras en el formalismo Lagrangiano:

Basta con modificar el Lagrangiano $L = T - U$
por $L = T - U + \lambda f.$

$$\rightarrow L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U + \lambda f.$$

Las ecs. de Euler-Lagrange (si seguimos considerando a λ como una constante) nos dan precisamente

$$m\ddot{q} = -\vec{\nabla}U + \lambda\vec{\nabla}f$$

(*): Está claro que λ finalmente es una función de las posiciones y velocidades, pero para efectos de este razonamiento la consideramos una constante.

Lo que hace falta es incluir en el formalismo la condición $f \equiv 0$.

Esto se logra fácilmente si "promovemos" λ a la categoría de una nueva coordenada de configuración.

En este caso tendríamos

$$L(q, \lambda; \dot{q}, \dot{\lambda}) := \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(q) + \lambda f(q). \quad (5)$$

De esta forma, las ecs. de E-L que obtenemos, son:

$$(a) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L}{\partial \lambda}.$$

$$(a) \rightarrow m \ddot{q} = -\vec{\nabla} U + \lambda \vec{\nabla} f$$

$$(b) \rightarrow 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = f(q).$$

Observación

Como veremos más adelante, el momento canónico P_i asociado a la variable de configuración q_i se define como $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

En el caso del Lagrangiano definido en (5) arriba, tenemos $\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0$, i.e. $P_\lambda = 0$.

En este caso hemos considerado un ejemplo donde la ligadura ($f \equiv 0$) es impuesta por unas condiciones externas. Pero como veremos, cuando $P_i = 0$ para un sistema dado, lo que esto no está diciendo es

que hay una ligadura intrínseca (inherente a la dinámica del sistema), que es causada por una redundancia en la descripción de los grados de libertad.

En caso de que haya varias restricciones f_1, \dots, f_k , se hace necesario introducir más multiplicadores

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Desde el punto de vista del problema de extremización de un funcional, la situación es completamente análoga a la del cálculo vectorial, donde para encontrar los puntos extremos de una función

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

sujeta a las restricciones $f_i(x) = c_i$ ($i=1, \dots, k$), se considera el problema de extremización de la función

$$h: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$h(\vec{x}, \vec{\lambda}) = g(\vec{x}) - \sum_i \lambda_i (f_i(\vec{x}) - c_i).$$

Para una discusión más detallada de multiplicadores de Lagrange en cálculo vectorial, se recomienda el libro "cálculo vectorial", de Marsden & Tromba.

En el contexto del cálculo variacional, se recomienda consultar "calculus of variations", de Gelfand & Fomin.