§2. Cálculo variacional.

Recordemos las ideas básicas del cálculo variacional.
Supongamos que tenemos una función de 3 variables, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Buscamos una función $y = y(x)$ tal que el funcional

$$F[y] := \int_{x_0}^{x_f} f(y(x), y'(x), x)\, dx$$

sea un extremo. Los puntos inicial (x_0) y final (x_f) en el intervalo de integración son fijos y buscamos soluciones $y(x)$ con valores $y(x_0) \equiv y_0$ y $y(x_f) \equiv y_f$ predeterminados.

Una forma de atacar este problema es la siguiente.
Dividamos el intervalo $[x_0, x_f]$ en N subintervalos, determinados por puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_f$ (partición de $[x_0, x_f]$).
Podemos entonces aproximar el gráfico de $y(x)$ con una curva poligonal determinada por pares de la forma (x_i, y_i), donde $y_i = y(x_i)$.
La derivada de $y(x)$ en el punto $x = x_i$ puede ser aproximada como

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

De esta forma, el funcional $F[y]$ puede ser aproximado por la siguiente expresión:

$$\tilde{F}(y_1, \ldots, y_N) := \sum_i f\left(y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i}, x_i\right) \Delta x_i ,$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Está claro que el valor específico de $\tilde{F}$ depende de la partición escogida, pero es intuitivamente claro que para f suficientemente "bien comportada", el valor de $\tilde{F}$ tenderá al valor de $F[y]$ para particiones más y más finas.

La ventaja es que (para una partición fija), $\tilde{F}(y_1, \ldots, y_N)$ es ahora una función de las N variables $y_1, y_2, \ldots, y_N$.

De esta forma, haciendo uso del cálculo normal de varias variables, podemos extremizar $\tilde{F}$ para así encontrar la curva poligonal (sujeta a la partición escogida) que mejor se aproxime a la solución real del problema.

Este método se conoce bajo el nombre de

"método de diferencias finitas".

Un ejemplo sencillo de aplicación consiste en usarlo para encontrar la curva más corta que une a dos puntos en un plano (ejercicio).

Recordemos ahora el método usual:

- Supongamos que la función $\tilde{y}(x)$ es la solución al problema. Es decir, $F[y]$ presenta un extremo en $\tilde{y}$.

- Consideremos una función $\eta(x)$, arbitraria salvo por el hecho de que $\eta(x_0) = 0 = \eta(x_f)$.

- Construir la siguiente familia de funciones ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$y_\lambda(x) = \tilde{y}(x) + \lambda\, \eta(x).$$

- Se debe cumplir entonces que la función $\lambda \mapsto h(\lambda)$, definida por $h(\lambda) := F[y_\lambda]$, presente un extremo en $\lambda = 0$

$$\boxed{\left.\frac{d}{d\lambda} h(\lambda)\right|_{\lambda=0} \overset{!}{=} 0}$$

Veamos qué implicaciones tiene la igualdad anterior:

$$\left.\frac{dh}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \int_{x_0}^{x_f} f(y_\lambda(x), y'_\lambda(x), x)\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_f} \left.\left(\frac{\partial f}{\partial y_\lambda} \frac{d y_\lambda}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y'_\lambda} \frac{d y'_\lambda}{d\lambda} \right)\right|_{\lambda=0} dx$$

integrar por partes

$$= \int_{x_0}^{x_f} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx$$

$$= \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x)\right|_{x=x_0}^{x=x_f}}_{=0 \text{ (por def. de } \eta)} + \int_{x_0}^{x_f} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \eta \right) dx$$

De esta forma obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x_f} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right) \eta(x)\, dx = 0.$$

Como η es arbitraria, llegamos a la conclusión de que el <u>integrando</u> se debe anular.

En otras palabras, hemos llegado a la conclusión de que, de existir, la solución $y(x)$ al problema debe satisfacer la siguiente ecuación (ec. de Euler-Lagrange):

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \text{Ec Euler-Lagrange.}$$

Esta es la ecuación fundamental del cálculo variacional que, como veremos, también resulta ser fundamental para la formulación Lagrangiana de la mecánica clásica.

Para un estudio detallado del cálculo variacional, se recomienda el libro "Calculus of variations" de Gelfand & Fomin.

Observación.

Como veremos al trabajar ejemplos, algunos problemas de cálculo variacional se pueden resolver más fácilmente usando una forma "modificada" de las ecs. de Euler-Lagrange, que es válida cuando se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \qquad (1)$$

Esta simplificación ocurre debido a que, para $y(x)$ sol. de E-L, podemos calcular ($f = f(y, y', x)$):

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=0} \quad (\text{por } (1))$$

$$\equiv \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' \qquad (E-L)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} y'\right)$$

Se sigue por lo tanto que $\frac{d}{dx}\left(f - \frac{\partial f}{\partial y'} y'\right) = 0$.

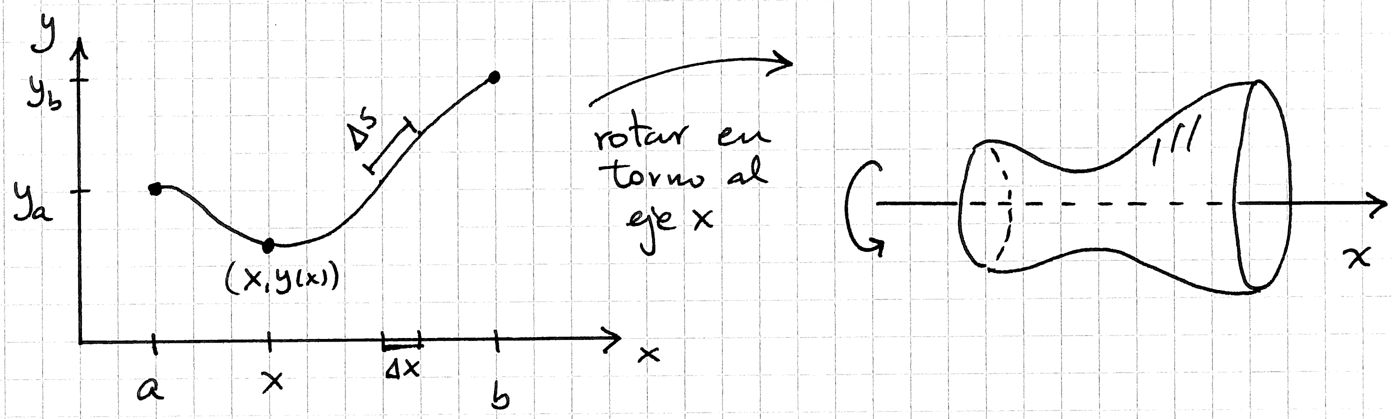
Concluimos entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' = cte \Leftrightarrow E-L}$$

Ejemplos

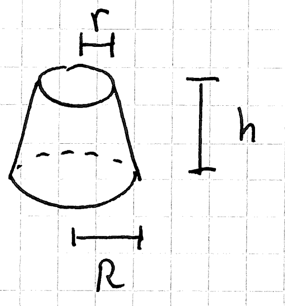
- Ejemplo 1

Encontrar aquella función $y(x)$ cuya gráfica, al ser rotada en torno al eje x, da lugar a una superficie de revolución de área mínima.



$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \approx \Delta x^2 + (y' \Delta x)^2$$

Area lateral de un cono truncado:



$$\longrightarrow A = \pi(r+R)\sqrt{(R-r)^2 + h^2}$$

Para el elemento infinitesimal de área podemos aplicar esta fórmula, con

$$r = y(x), \quad R = y(x+\Delta x), \quad h = \Delta x$$

$$\searrow$$

$$\Delta A = \pi\,\left(y(x) + y(x+\Delta x)\right)\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2}$$

$$\approx 2\pi y\;\Delta s$$

$$\approx \sqrt{1+y'^2}\cdot 2\pi y\cdot\, dx\,.$$

$$\searrow \text{Área} = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx\,.$$

En este caso tenemos $f(y, y', x) = y\sqrt{1+y'^2}$

Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, podemos usar la forma alternativa

$$f - \frac{\partial f}{\partial y'}\,y' = \alpha \;(= \text{cte})\,,$$

de donde fácilmente se obtiene $y' = \sqrt{(y/\alpha)^2 - 1}\,.$

Integrando esta ecuación obtenemos la solución:

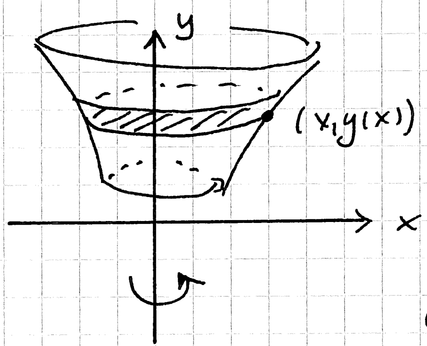
$$y(x) = \alpha\cosh\left(\frac{x}{\alpha} + \beta\right), \quad \alpha, \beta: \text{constantes}$$

- Ejemplo 2

Resolver el problema del ejemplo anterior haciendo uso de la forma original $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y}$ es algo más complicado.

Sin embargo, si rotamos la gráfica respecto al eje $\underline{\underline{y}}$ (en lugar de x), sí podemos usarla y llegar rápidamente a la solución.

En este caso tenemos:



$$\Delta A \approx 2\pi x \sqrt{\Delta x^2 + (y'\Delta x)^2}$$

$$\searrow f(y, y', x) = x\sqrt{1+y'^2} \overset{EL}{\Rightarrow}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} \overset{EL}{=} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x y' = c\sqrt{1+y'^2} \quad (c = \text{cte}) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{\sqrt{x^2 - c^2}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c \cdot \cosh^{-1}(x/c) + a$$

$$c, a = \text{ctes}.$$

Invirtiendo la relación, obtenemos:

$$x(y) = c \cdot \cosh\left(\frac{y}{c} - a\right),$$

igual que en el ejemplo 1.

s.

- Ejemplo 3

Encontrar la curva de longitud mínima que une dos puntos dados en el plano.

Sol.

Asumiremos, por simplicidad, que dicha curva puede ser descrita como el gráfico de una función $y(x)$.

En este caso, para el elemento de longitud, tenemos:

$$\Delta s = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \Delta x ,$$

de tal forma que la longitud de la curva determinada por la función $y(x)$ será

$$L[y] = \int ds = \int \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

Con $f(y, y', x) = \sqrt{1 + y'(x)^2}$, las ecs. de E-L toman la siguiente forma:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \longrightarrow 0 = \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \Longrightarrow$$

$$y' = \alpha \sqrt{1 + y'^2} \longrightarrow y' = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} , \text{ i.e.,}$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, x + \beta \qquad (\alpha, \beta : \text{constantes}).$$

Como era de esperarse, la solución es una línea recta.

- Ejemplo 4

Igual que el ejemplo anterior, pero sobre la superficie de una esfera unitaria.

Usando coordenadas polares esféricas, con θ el ángulo medido desde el eje z positivo y φ el ángulo azimutal, tenemos

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2,$$

lo cual nos da 2 opciones:

1) Escoger $\varphi = \varphi(\theta)$. En este caso tenemos

$$f(\varphi, \theta, \varphi', \theta') = \sqrt{1 + \sin^2\theta \, \varphi'^2},$$

con $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta}$.

La ec. de E-L nos da $0 = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{d}{d\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi'} = \frac{d}{d\theta}\Bigg(\underbrace{\frac{\sin^2\theta \cdot \varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta \, \varphi'^2}}}_{= cte \equiv \alpha}\Bigg)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\alpha}{\sqrt{\sin^2\theta(\sin^2\theta - \alpha^2)}}$$

$$\searrow$$

$$\varphi - \varphi_0 = \alpha \int \frac{d\theta}{\sin\theta \sqrt{\sin^2\theta - \alpha^2}}.$$

Aunque es posible resolver esta integral (ejercicio!), el resultado no es muy ilustrativo, así que preferimos más bien explorar la segunda opción:

2) Escoger $\theta = \theta(\varphi)$; así, $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d^2\varphi$
$$= ((\theta')^2 + \sin^2\theta) d\varphi^2, \text{ luego}$$

$$f(\varphi, \theta, \varphi', \theta') = \sqrt{(\theta')^2 + \sin^2\theta}$$

E-L: $\dfrac{d}{d\varphi}\dfrac{\partial f}{\partial \theta'} = \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \longrightarrow$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\theta'}{\sqrt{(\theta')^2+\sin^2\theta}}\right) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(\theta')^2+\sin^2\theta}}$$

$\downarrow$

$$\theta''\sqrt{\theta'^2+\sin^2\theta} - \frac{\theta'(\theta'\theta''+\theta'\sin\theta\cos\theta)}{\sqrt{\theta'^2+\sin^2\theta}} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\theta'^2+\sin^2\theta}}(\theta'^2+\sin^2\theta)$$

$$\theta''(\cancel{\theta'^2}+\sin^2\theta) - \cancel{\theta'^2\theta''} - \theta'^2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta\cos\theta(\theta'^2+\sin^2\theta)$$

$$\theta''\sin^2\theta - (\theta')^2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta\cos\theta(\theta'^2+\sin^2\theta).$$

Descartando soluciones con $\sin\theta = 0$, podemos simplificar a

$$\boxed{\theta''\sin\theta - 2\theta'^2\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta = 0} \qquad (2).$$

Consideremos ahora el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{1}{\tan\theta}$$

Derivando a ambos lados (con respecto a φ), obtenemos

$$\boxed{\theta' = -\sin^2\theta\, x'}, \qquad \underline{(i)}$$

y derivando una vez más, y usando (i), obtenemos:

$$\boxed{\theta'' = 2x'^2\sin^3\theta\cos\theta - x''\sin^2\theta} \quad \underline{(ii)}$$

Si ahora reemplazamos (i) y (ii) en (2),
llegamos a un resultado que simplifica enormemente el problema:

$$x'' \sin\theta + \cos\theta = 0 \, ,$$

o, teniendo en cuenta la definición de x como $(\tan\theta)^{-1}$,

$$x'' + x = 0 \, .$$

Las soluciones de esta ecuación son de la forma

$$x = a\cos\varphi + b\sin\varphi$$

para a, b ciertas constantes. Pero sustituyendo $x = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ y multiplicando a ambos lados por $\sin\theta$, obtenemos:

$$\cos\theta = a \sin\theta\cos\varphi + b \sin\theta\sin\varphi \, .$$

Pasando a coordenadas cartesianas $\begin{array}{l} x = \sin\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{array}$, vemos que la solución encontrada es equivalente a la solución de

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$z = ax + by \, .$$

Las soluciones de este sistema de ecs. representan la intersección de planos que pasan por el origen de $\mathbb{R}^3$ con la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$; es decir, las curvas que extremizan la longitud de arco en una esfera son justamente los "grandes arcos".

——— // ———

Observación

Desde un punto de vista intuitivo, parece claro que la solución al problema de las trayectorias que extremizan la longitud de arco debería ser el mismo si en lugar de usar ds usamos ds^2. Esto, por supuesto, simplificaría los cálculos ya que la presencia de la raíz cuadrada en ds hace que los cálculos explícitos se compliquen. Por esta razón estudiaremos una clase de ejemplos que nos permitirá mostrar que esta idea es correcta.

▶ Supongamos que para un cierto problema variacional, de la forma

$$F[x,y] = \int_{t_0}^{t_f} f(x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt \quad , \quad \delta F = 0,$$

se tiene que la función f es homogénea de primer grado en los términos que corresponden a las derivadas, es decir, f es tal que, para todo $\lambda > 0$, se cumple

$$f(x,y,\lambda\dot{x},\lambda\dot{y}) = \lambda f(x,y,\dot{x},\dot{y}). \qquad (3).$$

Es fácil ver que, como consecuencia de (3), el funcional F es invariante bajo reparametrizaciones $t \to t(\tau)$ ($dt/d\tau > 0$). De hecho, si τ_0, τ_f se definen a través de $t(\tau_0) = t_0$, $t(\tau_f) = t_f$, entonces se tiene:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} f\left(x(\tau), y(\tau), \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_f} f\left(x,y,\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau}, \frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) d\tau$$

$$\overset{(3)}{=} \int_{\tau_0}^{\tau_f} f(x,y,\dot{x},\dot{y}) \frac{dt}{d\tau}\, d\tau = \int_{t_0}^{t_f} f(x,y,\dot{x},\dot{y})\, dt$$

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}, \dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}$$

Como $\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \sqrt{(\lambda\dot{x})^2 + (\lambda\dot{y})^2}$, vemos que la longitud de arco es invariante bajo reparametrizaciones.

Una opción conveniente es utilizar la longitud de arco como parámetro:

Si la curva está parametrizada a través de

$$t \longmapsto (x(t), y(t)) \quad , \quad t \in [t_0, t_f],$$

definimos la siguiente reparametrización:

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt$$

<u>Ejercicio:</u> mostrar que, al usar s como parámetro "de tiempo", la rapidez de la curva $s \mapsto (x(s), y(s))$ es precisamente igual a 1.

Consideremos entonces

$$f(x,y,x',y') := \sqrt{x'^2+y'^2} \; ; \; g(x,y,x',y') := \frac{1}{2}(x'^2+y'^2),$$

donde por el momento <u>no</u> especificamos qué parametrización "$x' = \frac{dx}{dt}$" usar. Con $x_1 = x$ y $x_2 = y$, obtenemos para las ecs. de E-L de f y de g, la siguiente relación:

$$(g = f^2/2)$$

$$\cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\Big(}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\left(f\,\frac{\partial f}{\partial x_i'}\right) - f\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= \left(\frac{df}{dt}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i'} + f\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i'} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Podemos hacer que el término $\frac{df}{dt}$ se anule, si usamos como parámetro la longitud de arco (en ese caso también tenemos $f=1$)

Obtenemos entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i'} - \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

es decir, f y g definen el <u>mismo</u> problema variacional!

De esta forma, podemos volver ahora al problema de la esfera, pero extremizando ~~a~~ el siguiente funcional (ejercicio):

$$\delta\left(\int (\theta'^2 + \sin^2\theta\,\varphi'^2)\,dt\right) = 0$$