

§1 Leyes de Newton/Principio D'Alembert

- I. Todo cuerpo permanece en estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, excepto si actúan sobre él fuerzas que lo hagan cambiar de estado.
- II. El cambio en el movimiento es proporcional a la fuerza aplicada y va dirigido a lo largo de la línea recta sobre la cual actúa la fuerza.
- III. A cada acción corresponde siempre una reacción, de igual magnitud y sentido opuesto.

Observaciones

- "Cuerpo" = partícula puntual, masiva
- Movimiento rectilíneo uniforme $\rightarrow \ddot{\vec{r}} = 0$.
- La primera ley determina la clase de los marcos inerciales (aquellos para los cuales vale $\ddot{\vec{r}} = 0$ si no hay fuerzas). En este sentido, la primera ley es independiente de la segunda y no tan solo un caso particular de esta.
- Por definición, la expresión "cambio en el movimiento" se refiere a la cantidad $\frac{d\vec{p}}{dt}$, donde $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$. De esta forma, la segunda ley toma la forma familiar,

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$
- Para el sistema cerrado de N partículas con fuerzas centrales, hay 10 cantidades que se conservan (\rightarrow relacionado con simetrías)

¿Qué tipo de simetrías?

↳ Transformaciones entre marcos inerciales que dejan invariantes las ecuaciones de movimiento.

↳ Grupo de Galileo (ejemplo de un "grupo de Lie").

Principio general (cf. teorema de Noether):

Invarianza $\xleftrightarrow{(*)}$ Ley de conservación.
(simetría)

En mecánica newtoniana, conservación de momento lineal / angular está asociada a la ausencia de fuerzas / torques externos.

↳ ¿Generalización de la mec. newtoniana donde (*) está en primer plano?

↳ Mecánica Lagrangiana.

• Leyes de Newton: formuladas para sistemas de partículas puntuales en \mathbb{R}^3 .

¿Cómo tener en cuenta ligaduras?

→ Para un estudio consistente de sistemas con ligaduras, es necesario tener en cuenta las leyes de Newton (que no hacen mención alguna de ligaduras). Las ligaduras son tenidas en cuenta al introducir de manera ciertas "fuerzas de reacción".

El estudio detallado de este tipo de sistemas lleva de forma natural al principio de trabajo virtual (D'Alembert) y este, a su vez, a las ecuaciones de Lagrange.

↳ Estudiemos entonces un par de ejemplos sencillos.

Vamos a distinguir entre fuerzas externas " \vec{F} " y fuerzas de reacción " \vec{R} ". -2-

Las fuerzas de reacción aparecen a raíz de la presencia de ligaduras.

Ejemplo 1 (Estática) Bloque sobre una mesa.

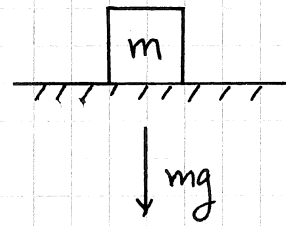
La fuerza externa es la fuerza de la gravedad: $\vec{F} = m\vec{g}$
¿Cuál es la fuerza de reacción, \vec{R} ?

Por la 2da ley, debemos tener $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R}$.

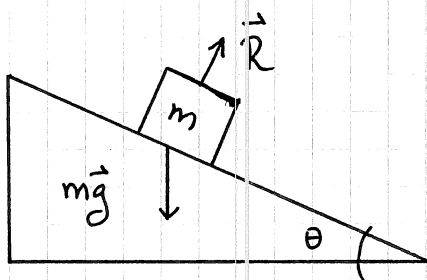
Sabemos que el bloque no se mueve. Por lo tanto, debemos tener $\ddot{\vec{r}} = 0$, luego $\vec{R} = -\vec{F}$.

$\|\vec{R}\| \equiv N$ "fuerza normal"

↳ en este caso (dado que $\vec{R} = -\vec{F}$)
está claro que \vec{R} es normal al plano.



Ejemplo 2 Bloque deslizándose sin fricción sobre un plano inclinado.



Asumimos \vec{R} normal al plano (intuitivamente claro, aunque no se sigue de las ecs. de mov. como en el ej. anterior).

Observación 1: nótese que \vec{R} no realiza trabajo.

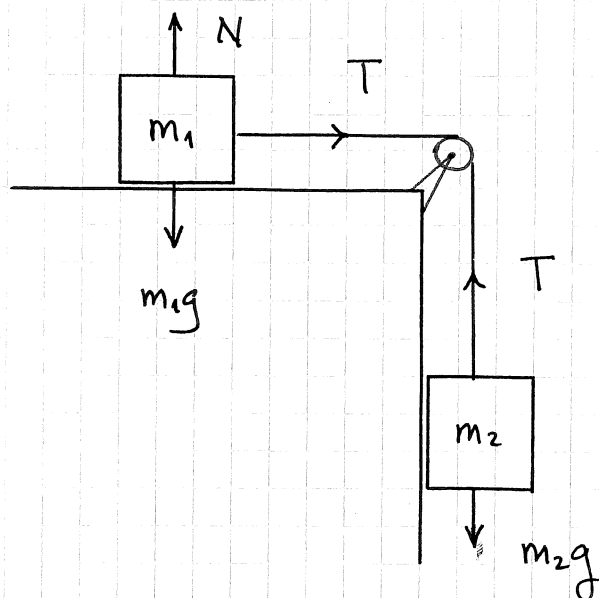
Observación 2: (para referencia posterior)



$$N = \|\vec{R}\| = mg \cos \theta.$$

Ejemplo 3

2 bloques y polea.



Fuerzas de reacción

$$\vec{R}_1 = (T, N); \quad \vec{R}_2 = (0, T)$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet m_2g - T &= m_2a \\ \bullet T &= m_1a \\ \bullet N &= m_1g \end{aligned} \right\} \text{2da ley}$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Observaciones:

- Si el bloque 1 se desplaza hacia la derecha una distancia Δx , el bloque 2 se debe desplazar una distancia igual hacia abajo. Calculando el trabajo total realizado por las fuerzas de reacción en este caso, encontramos:

$$\Delta \vec{r}_1 = (\Delta x, 0), \quad \Delta \vec{r}_2 = (0, -\Delta x)$$

$$\vec{R}_1 = (T, N), \quad \vec{R}_2 = (0, T)$$

$$\hookrightarrow W_R = \vec{R}_1 \cdot \Delta \vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot \Delta \vec{r}_2 = T\Delta x - T\Delta x = 0.$$

$$W_R = 0$$

- Como esta condición ($W_R = 0$) se cumple en general en este tipo de problemas, vamos a "elevationarla" eventualmente al nivel de un principio, que llamaremos el principio de trabajo virtual (D'Alembert).

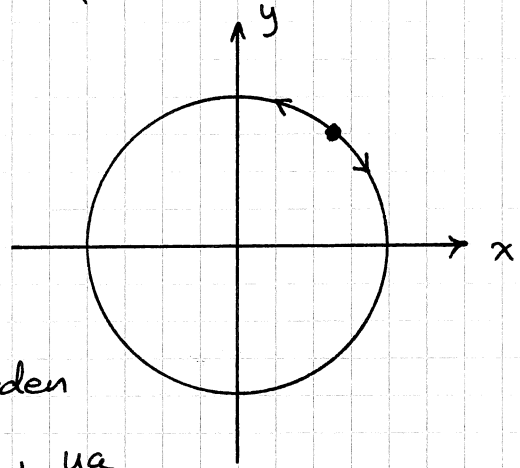
Antes de estudiar el principio de D'Alembert, vamos a introducir varios conceptos importantes tales como "grados de libertad", "ligaduras (no-) holonómicas" y espacios de configuración.

Por el momento evitaremos usar definiciones matemáticamente precisas. En este punto es más relevante ganar intuición acerca de los conceptos.

Ejemplo 4 Partícula libre en el espacio 3D \rightarrow
 Posición descrita por 3 coordenadas: x, y, z
 $\vec{r} = (x, y, z) \rightarrow$ 3 grados de libertad.
 \rightarrow Espacio de configuración: $Q = \mathbb{R}^3$.
 $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

Ejemplo 5 Partícula en un plano, confinada a moverse en un círculo de radio R .

Posición descrita por 2 coordenadas: x, y .
 $\rightarrow \vec{r} = (x, y)$.



Pero estas coordenadas no pueden variar de forma independiente, ya que la condición de que la partícula se mueva sobre el círculo impone la siguiente restricción:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Tenemos, por lo tanto, $\begin{matrix} 2 \\ \uparrow \\ \# \text{ coord.} \end{matrix} - \begin{matrix} 1 \\ \uparrow \\ \# \text{ restricciones} \end{matrix} = 1$ grado de libertad.

\rightarrow Espacio de configuración: $Q = S^1$, $\dim S^1 = 1$.

Comentarios:

- Nótese que la restricción (ligadura), se puede expresar de la siguiente forma:

$$f(x,y) = 0,$$

donde f es la siguiente función:

$$f(x,y) := x^2 + y^2 - R^2.$$

Es decir, las coordenadas x,y de la partícula deben cumplir con la ecuación de ligadura: $f(x,y) = 0$.

→ Este es un tipo especial de ligadura, denominado "ligadura holonómica".

- Como conjunto, el espacio de posiciones ^{a las} que puede acceder la partícula es un círculo.

A este conjunto de posibles posiciones lo denominaremos "espacio de configuración".

La dimensión (para el ejemplo anterior) de este espacio es uno, que coincide con el número de grados de libertad.

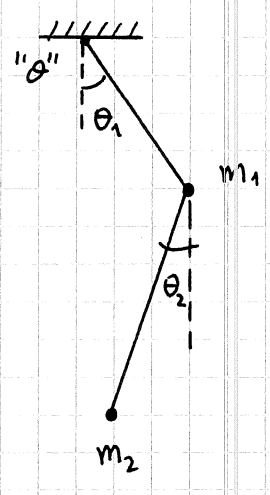
En general tendremos:

# Grados de libertad	=	Dimensión del espacio de configuración
----------------------	---	--

- Podemos introducir una variable θ , que servirá de "coordenada generalizada": $0 \leq \theta < 2\pi$ →

$$\left. \begin{array}{l} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{array} \right\} \text{ En lugar de resolver ecs. para } x(t), y(t) \rightarrow \theta(t).$$

Ejemplo 6 Péndulo doble



Posición de m_1 : $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$
 Posición de m_2 : $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ } 4 variables dependientes
 (origen en "O").

¿Restricciones (ligaduras)? → hay 2:

$$\left. \begin{aligned} \|\vec{r}_1\| &= l_1 \\ \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| &= l_2 \end{aligned} \right\} 2 \text{ restricciones.}$$

↳ # grados de libertad = $4 - 2 = 2$.

⇒ el sistema se debe poder describir haciendo uso de 2 coordenadas generalizadas. La escogencia natural es: θ_1, θ_2 .

⇒ Espacio de configuración es $Q = S^1 \times S^1 \cong T^2$

Nótese que las ligaduras en este caso también son holonómicas. Veamos:

$$\|\vec{r}_1\|^2 = x_1^2 + y_1^2 \rightarrow f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) := x_1^2 + y_1^2 - l_1^2$$

$$\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \rightarrow f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) := (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2$$

↳ Ligaduras:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) &= 0 \\ f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 7

Un ejemplo de ligadura no holonómica es un disco rodando sin deslizar sobre un plano (ver Goldstein, p. 15) ... más detalles luego.

Ejemplo 8

Consideremos de nuevo el ejemplo de la partícula que está restringida a moverse dentro de un círculo, pero ahora supongamos que el círculo está en movimiento.

En el caso del círculo estático, el espacio de configuración era el conjunto de nivel cero de la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2.$$

Si denotamos con $(a(t), b(t))$ el vector de posición del centro del círculo ahora que se mueve, dicho conjunto de nivel se moverá también. La ligadura ahora será:

$$f(x,y,t) \stackrel{!}{=} 0,$$

donde

$$f(x,y,t) := (x - a(t))^2 + (y - b(t))^2 - R^2.$$

→ ligadura "reónoma" (dependencia explícita del tiempo).

— " —

En el ejemplo anterior, la ecuación que define la ligadura presenta una dependencia explícita del tiempo. Es por esto que a este tipo de ligaduras se les denomina

Ligaduras Reónomas.

Aquellas que no presentan dependencia explícita del tiempo se denominan Ligaduras Esclerónomas.

Para precisar un poco más estos conceptos, consideremos un sistema físico de n partículas en el espacio Eudídeo 3D.

La posición de la i -ésima partícula está dada por el vector $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Si el sistema no está sujeto a ligaduras, entonces el espacio de configuración es

$$Q = \{ (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \in \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3 \} \cong \mathbb{R}^{3n}$$

En este caso, el sistema posee 3n grados de libertad. Si el sistema está sujeto a ligaduras, el número de grados de libertad se verá reducido.

Consideraremos los siguientes tipos de ligaduras:

• Ligaduras Holonómicas

→ El sistema está sujeto a restricciones de la forma

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) &= 0 \end{aligned} \quad (L < 3n)$$

Teniendo L ecuaciones escalares, vemos que los grados de libertad se reducen a : $3n - L$

Hay que notar que este es el caso si las restricciones son independientes. Con esto queremos decir lo siguiente:

Definir nuevas coordenadas (esto es tan solo un cambio de notación conveniente)

$$\begin{aligned} x &\equiv (x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) \\ &\hookrightarrow x \in \mathbb{R}^{3n} \end{aligned}$$

Definir ahora la siguiente función:

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^{3n} &\longrightarrow \mathbb{R}^L \\ x &\longmapsto F(x) := (f_1(x), f_2(x), \dots, f_L(x)) \end{aligned}$$

Al decir que las restricciones sean independientes, queremos decir lo siguiente:

La matriz de derivadas de F es de rango maximal; es decir, de rango L .

En otras palabras: las filas de la matriz de derivadas (para todo x t.q. $F(x)=0$), son linealmente independientes.

Por otro lado, notemos que la condición $F(x)=0$ quiere decir que el conjunto de configuraciones a las que el sistema puede acceder es justamente $Q = F^{-1}(0)$, el conjunto de nivel cero de F .

La existencia de la derivada de F en cada punto de Q y la independencia de sus filas, son condiciones que vamos a suponer se cumplen. Esto garantiza que Q es una hipersuperficie (subvariedad) de \mathbb{R}^{3n} .

Tal como sucede en el caso de una esfera considerada como superficie en \mathbb{R}^3 , solo hace falta utilizar tantas coordenadas como la dimensión de Q .

En general estas coordenadas estarán definidas localmente.

(p. ej., para la esfera los ángulos θ, φ no cubren todos los puntos ya que $\theta=0, \pi$ queda excluido).

Es por esta razón que más adelante trataremos al espacio Q como una "variedad diferenciable".

Observación:

Nótese que de $0 = f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ se sigue inmediatamente que

$$\sum_{j=1}^n \vec{\nabla}_j f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \cdot d\vec{r}_j = 0 \quad (1 \leq k \leq L),$$

o, en la notación $x \equiv (x_1, \dots, x_{3n}) = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$,

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior es lo que se conoce con el ~~nombre~~ nombre de diferencial exacto.

Ahora bien, las condiciones de ligadura también podrían sernos dadas en la forma

$$\sum_{i=1}^{3n} h_i^k(x) dx_i = 0,$$

para ciertas funciones h_i^k . Si estas funciones son de la forma

$$h_i^k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i},$$

para ciertas funciones f_k , entonces podemos integrar la ecuación y obtener una condición de ligadura holonómica.

Aún si las h_i^k no son explícitamente de esa forma, en algunos casos es posible encontrar un factor integrante.

Es decir, una función g^k (para cada k) tal que $\sum_{i=1}^{3n} g^k h_i^k dx_i$ sea un diferencial exacto.

Es decir, tal que $g^k h_i^k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ para cierta f_k .

Cuando no es posible encontrar tal factor integrante (no por falta de imaginación, sino porque no existe!), decimos que $\sum_i h_i^k dx_i$ es un diferencial inexacto.

Esta es, por supuesto, la misma terminología que se utiliza en termodinámica, donde

du : dif. exacto, pero da : dif. inexacto.

• Ligaduras No-holónicas

Una ligadura se denomina no-holónica cuando no puede ser expresada como una ligadura holónica.

Este es el caso, por ejemplo, para un gas contenido en el interior de un recipiente. En este caso, las ligaduras están dadas no por condiciones de la forma $f(x) = 0$, sino por desigualdades ($0 \leq x_i \leq 1$).

Ciertas ligaduras no-holónicas pueden ser expresadas en forma diferencial (ver ejemplo a continuación) a través de ecuaciones de la forma

$$\sum_{i=1}^{3n} h_i dx_i = 0,$$

donde el diferencial \int es inexacto.

Aparte de la clasificación entre ligaduras holónicas y no-holónicas, existe una distinción adicional, dependiendo de si las ligaduras dependen o no del tiempo.

• Ligaduras Reonomas \rightarrow Dependientes del tiempo

• Ligaduras Escleronomas \rightarrow Independientes del tiempo

"Holos" (griego) \rightarrow "totalidad", "globalidad"

"Rheos" (griego) \rightarrow "fluir"
(en este caso, fluir en el tiempo)

"Skleros" (griego) \rightarrow "rígido"

(no varía en el tiempo)

\hookrightarrow lig. holon. = dada por una ley global \rightarrow diferencial exacto, condición integrable o "total".

Ejemplo 9

Una ligadura de la forma $f_k(x_1, \dots, x_{3n}, t) = 0$, con $\frac{\partial f_k}{\partial t} \neq 0$, es una ligadura holonómica y reonoma.

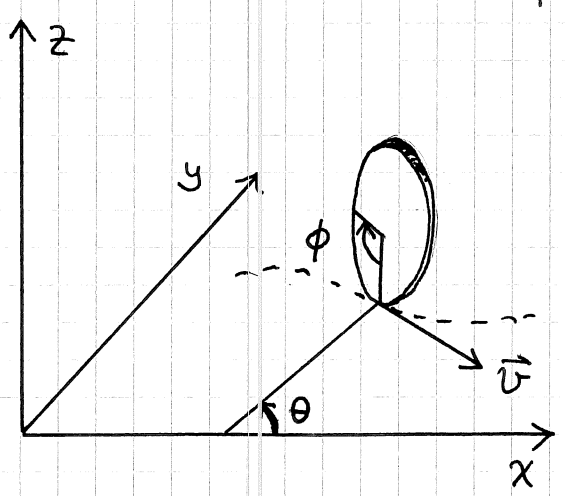
Si $\frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$ ($\forall k, x$), entonces podemos escribir $f_k(x_1, \dots, x_{3n}) = 0$ y tenemos una ligadura holonómica y escleronoma.

De forma similar distinguimos entre ligaduras no-holonómicas que son reonomas / escleronomas.

Ejemplo 10 (Disco rodando sobre un plano)

→ Este es el mismo ejemplo 7, pero ahora en detalle. (cf. ejemplo pág. 15, fig. 1.5 en Goldstein).

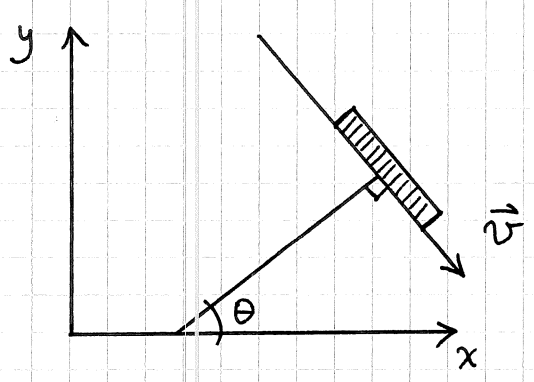
Disco rodando en un plano, sin deslizar:



Coordenadas:

- (x, y) → coordenadas, sobre el plano horizontal, del centro del disco.
- ϕ : ángulo de rotación alrededor del eje del disco.
- θ : ángulo entre el eje x y el eje del disco (define orientación del disco).

Vista superior:



Sea a el radio del disco.

Tenemos las siguientes ligaduras:

• Disco rueda sin deslizar: $v = a\dot{\phi}$

• Velocidad dirigida perpendicularmente al eje del disco:

$$\vec{v} \equiv (\dot{x}, \dot{y}) = v(\sin\theta, -\cos\theta)$$

↪ Tenemos 3 ecuaciones:

$$(1) \quad v = a\dot{\phi}$$

$$(2) \quad \dot{x} = v\sin\theta$$

$$(3) \quad \dot{y} = -v\cos\theta$$

Insertando (1) en (2) y en (3), obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{d\phi}{dt} \sin\theta$$

$$\frac{dy}{dt} = -a \frac{d\phi}{dt} \cos\theta$$

→

$$\begin{cases} dx - a\sin\theta d\phi = 0 \\ dy + a\cos\theta d\phi = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Las ecuaciones (*) son de la forma $\sum_i h_i^k(x) dx_i = 0$.

Se puede mostrar (ejercicio) que no existe ningún factor integrante para (*).

Este es, por lo tanto, un ejemplo de un sistema con ligaduras no-holonómicas.

Observación. Mientras que las ligaduras holonómicas disminuyen el número de grados de libertad globalmente, las ligaduras no-holonómicas lo hacen solo localmente.

(Piense en los grados de libertad en el caso de un carro: usted solo puede mover el timón hacia la derecha o la izquierda y puede mover el carro solo hacia adelante y atrás, así que localmente solo es posible acceder a posiciones sobre trayectorias unidimensionales. Sin embargo, manipulando los controles adecuadamente, usted puede -en principio- parquear donde quiera).

Pasemos ahora a considerar el problema de la integrabilidad de expresiones tales como (*) en el ejemplo anterior.

Asumamos que se tiene un sistema descrito por coordenadas $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, sujeto a la restricción

$$f_1(q) dq_1 + f_2(q) dq_2 + \dots + f_n(q) dq_n = 0 \quad (**)$$

En virtud de esta restricción, las coordenadas q_1, \dots, q_n son dependientes.

Buscamos una condición necesaria (y en lo posible también suficiente) para que el lado izquierdo de (**) sea un diferencial exacto.

Si (**) se puede reemplazar por una condición de la forma

$$g(q_1, \dots, q_n) = 0,$$

entonces necesariamente se debe tener que

$$0 = \frac{\partial g}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial q_n} dq_n \quad \text{es el lado izquierdo de}$$

(**), o bien un múltiplo de este. Es decir, debe existir una función $J = J(q)$ (factor integrante), tal que $J \cdot \sum_i f_i dq_i$ sea un diferencial exacto.

En otras palabras, buscamos funciones $g = g(q)$ y $J = J(q)$ tales que

$$\frac{\partial g}{\partial q_i} = J(q) f_i(q) \quad (i=1, \dots, n).$$

De la igualdad $\frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}$ se sigue entonces

la siguiente identidad ($\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q_i}$; $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$):

$$f_k (\partial_i f_j - \partial_j f_i) + f_i (\partial_j f_k - \partial_k f_j) + f_j (\partial_k f_i - \partial_i f_k) = 0$$

Esta es, por lo tanto, una condición necesaria para la integrabilidad de $\sum_i f_i dq_i$.

Es interesante anotar que la condición también es suficiente. Más adelante volveremos sobre este punto.

El principio del trabajo virtual (D'Alembert)

2da Ley de Newton: $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$.

En presencia de ligaduras, aparecen fuerzas de "reacción".

↳ 2da Ley se convierte en:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R}.$$

Problema: mientras que las fuerzas externas nos son dadas (fuerza de gravedad, fuerza de resorte, etc.) las fuerzas de reacción no se conocen a priori. ¿Cómo introducir las ligaduras en el formalismo Newtoniano de tal forma que las fuerzas de ligadura se puedan determinar de manera única, y con ellas las ecuaciones de movimiento?

En el ejemplo del bloque deslizándose sobre un plano (ejemplo 2) hemos asumido que la fuerza de reacción es perpendicular al plano. También hemos visto que dicha fuerza no realiza trabajo.

¿Cómo resolveríamos este problema si no supiéramos en qué dirección apunta la fuerza de reacción?

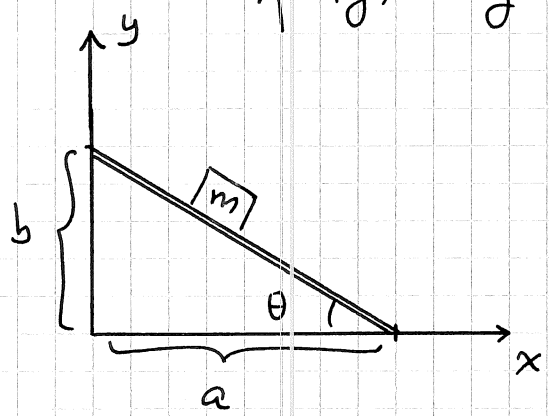
Obviamente nos hace falta información (adicional a las leyes de Newton).

En el problema del ejemplo 2 la ligadura es holonómica, ya que si representamos el plano con una recta, digamos

$$y = b - (b/a)x,$$

donde a y b están indicados en la figura, entonces podemos representar las trayectorias posibles del bloque a través de la siguiente condición:

$$f(x,y) := y + \frac{b}{a}x - b \stackrel{!}{=} 0.$$



→ El bloque solamente puede moverse sobre trayectorias en el plano $(t \mapsto (x(t), y(t)))$ para las que se cumple $f(x(t), y(t)) = 0$.

Definiremos por lo tanto un desplazamiento (o velocidad) virtual como un vector tangente al espacio

$$Q := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0 \}$$

No estamos haciendo distinción entre vectores de velocidad y de desplazamiento porque el tiempo no juega ningún papel en este análisis \rightarrow debemos imaginarnos que, para un tiempo fijo dado, desplazamos el bloque a lo largo de cualquier dirección que esté permitida, o, en otras palabras, que sea compatible con las ligaduras.
 \rightarrow estos son los desplazamientos virtuales.

Ahora impondremos el siguiente principio:

"El trabajo neto realizado por las fuerzas de reacción bajo desplazamientos virtuales es igual a cero".

Si \vec{w} es una velocidad (resp. desplazamiento) virtual, entonces la potencia (resp. trabajo) virtual que corresponde a una fuerza de reacción \vec{R} debe ser cero: $\vec{R} \cdot \vec{w} = 0$.

Pero para el caso de una restricción como la del ejemplo, dada por $f(x,y) = 0$, el conjunto de velocidades virtuales (vectores tangentes a $\mathcal{Q} = f^{-1}(0)$) está dado por

$$\{\vec{w} \mid \vec{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{w} = 0\}.$$

En el ejemplo, $f^{-1}(0)$ es un conjunto de dimensión 1 (una recta). Si \vec{w} es tangente a este conjunto, que es equivalente a decir que $\vec{\nabla} f \perp \vec{w}$, entonces en virtud de que $\vec{R} \cdot \vec{w} = 0$ (trabajo virtual es cero), no queda otra opción, que ~~el~~ $\vec{R} \parallel \vec{\nabla} f$, i.e., debe existir un
 más

escalar λ tal que

$$\vec{R} = \lambda \vec{\nabla} f.$$

Por razones que discutiremos más adelante, diremos que λ es un "multiplicador de Lagrange".

En resumen, tenemos:

- Definición: velocidad virtual (\vec{w}) \rightarrow es un vector tal que $\vec{\nabla} f \cdot \vec{w} = 0$ (desplaz. compatible con $f \stackrel{!}{=} 0$)
- Postulado: para toda velocidad virtual \vec{w} , la (suma de las) fuerza(s) de reacción \vec{R} debe cumplir $\vec{R} \cdot \vec{w} = 0$ ("zero virtual power").
- Consecuencia: existe un escalar λ tal que $\vec{R} = \lambda \vec{\nabla} f$.

Este resultado puede ser usado para determinar el valor de λ y, por lo tanto, para resolver las ecuaciones de movimiento. Veamos:

Tenemos: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$,

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R}, \quad f(x,y) = y + \frac{b}{a} x - b$$

$$\vec{R} = \lambda \vec{\nabla} f \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} f = (1, b/a)$$

$$\vec{F} = m\vec{g} = m(0, -g)$$

Toda solución $\vec{r}(t)$ debe satisfacer $f(\vec{r}(t)) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla} f \cdot \dot{\vec{r}}$$

Obtenemos 2 ecuaciones:

$$(i) \quad m\ddot{\vec{r}} = mg(0, -1) + \lambda \vec{\nabla} f,$$

$$(ii) \quad \vec{\nabla} f \cdot \vec{r} = 0.$$

Multiplicando (i) por $\frac{1}{m} \vec{\nabla} f$ obtenemos

$$\left(\frac{1}{m} \|\vec{\nabla} f\|^2 \right) \lambda = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f - \vec{g} \cdot \vec{\nabla} f.$$

Para eliminar $\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f$ de esta expresión, tomamos la derivada resp. a t de (ii):

$$0 = \frac{d}{dt} (\vec{\nabla} f \cdot \dot{\vec{r}}) = \vec{\nabla} f \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{\nabla} f \right)}_{=0}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{m} \|\vec{\nabla} f\|^2 \right) \lambda &= -\vec{\nabla} f \cdot \vec{g} = g \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \lambda = mg \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

\Rightarrow

$$\vec{R} = \lambda \vec{\nabla} f = mg \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{b}{a}, 1 \right)$$

$$= mg \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\rightarrow N := \|\vec{R}\| = mg \cos \theta.$$

Con el ejemplo anterior en mente, pasamos ahora a una formulación más general del principio de D'Alembert.

Para esto, seguiremos la siguiente referencia:

|| F. Verheest & N. Van den Bergh
|| Eur. J. Phys. 14 (1993) 217-221.

Sistema de N partículas: $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$

\vec{r}_i : vector posición de la i -ésima partícula, de masa m_i .

$\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t)$: fuerza que actúa sobre la i -ésima partícula ($i=1, \dots, N$)
→ fuerza externa.

Debido a la presencia de ligaduras, aparecen fuerzas de reacción \vec{R}_i , de tal forma que la 2da ley de Newton toma la forma

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k \quad k=1, \dots, N.$$

\vec{F}_k → dadas "a priori"

\vec{R}_k → deben ser determinadas.

En el caso de ligaduras holonómicas-escleronomas, tendremos L funciones f^1, \dots, f^L ($L < 3N$) con

$$f^\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \stackrel{!}{=} 0 \quad (1 \leq \alpha \leq L).$$

De la condición $f^\alpha \stackrel{!}{=} 0$ se sigue -para soluciones $\vec{r}_i(t)$ de las ecuaciones de movimiento - que se debe cumplir

$$\frac{d}{dt} f^\alpha(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)) = 0,$$

es decir:

$$\sum_{k=1}^N (\vec{\nabla}_{\vec{r}_k} f^\alpha) \cdot \dot{\vec{r}}_k = 0.$$

Si las ligaduras son holonómicas-reonomas, tendremos

$$f^\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \text{ y por lo tanto,}$$

$$\left(\sum_{k=1}^N (\nabla_{\vec{r}_k} f^\alpha) \cdot \dot{\vec{r}}_k \right) + \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} = 0 \quad (1 \leq \alpha \leq L).$$

Teniendo en cuenta esta ecuación, así como la discusión previa acerca de ligaduras holonómicas/no-holonómicas, vemos que podemos considerar la siguiente clase más general de ligaduras:

$$\left(\sum_{k=1}^N \vec{A}_k^\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_k \right) + B^\alpha = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq L.$$

Esta clase incluye ligaduras holonómicas ($\vec{A}_k^\alpha = \nabla_{\vec{r}_k} f^\alpha$), escleronomas ($B^\alpha = 0$) y holonómicas-reonomas ($\vec{A}_k^\alpha = \nabla_{\vec{r}_k} f^\alpha$, $B^\alpha = \partial_t f^\alpha$).

▷ Definición de desplazamientos (o velocidades) virtuales para el caso de ligaduras holonómicas-reonomas.

En este caso las ligaduras son de la forma

$$f^\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0.$$

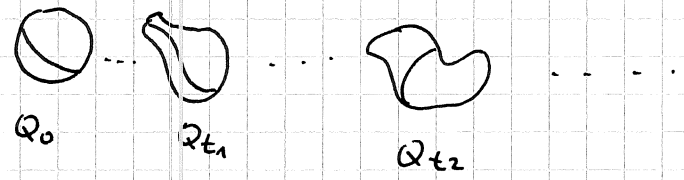
Para un valor fijo de t , digamos $t = t^*$, consideremos el conjunto

$$Q_{t^*} := \left\{ (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N} \mid f^\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t^*) = 0 \right\}$$

como una "hipersuperficie" inmersa en el espacio \mathbb{R}^{3N} .

Si ahora permitimos que t varíe, obtendremos una serie de espacios Q_t en \mathbb{R}^{3N} .

Podemos imaginarnos que en $t=0$ tenemos un espacio Q_0 y que este se desplaza (posiblemente deformándose) dentro de \mathbb{R}^{3N} a medida que avanza el tiempo, dando lugar a una "secuencia" $t \mapsto Q_t$



Definiremos el conjunto de las velocidades virtuales sobre un punto de Q_t como aquellos vectores $\vec{w} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ que son tangentes a Q_t en el punto dado.

De manera concreta, esto quiere decir:

$$\sum_{k=1}^N (\vec{\nabla}_{\vec{r}_k} f^\alpha) \cdot \vec{w}_k = 0.$$

Nótese la diferencia entre velocidad virtual (pensada como un desplazamiento infinitesimal sobre la superficie Q_t -para t fijo-) y un vector velocidad "real" $(\dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N)$, que debe satisfacer

$$\sum_{k=1}^N (\vec{\nabla}_{\vec{r}_k} f^\alpha) \cdot \dot{\vec{r}}_k + \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} = 0.$$

El principio del trabajo virtual dice entonces que el trabajo neto realizado por las fuerzas de reacción \vec{R}_k bajo desplazamientos (vels.) virtuales \vec{w}_k es cero:

$$\sum_{k=1}^N \vec{R}_k \cdot \vec{w}_k = 0.$$

Retornando al caso más general, tenemos:

• Ligaduras:
$$\sum_{k=1}^N \vec{A}_k^\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_k + B^\alpha = 0 \quad (1 \leq \alpha \leq L)$$

• Velocidades virtuales: Definidas, para cada "punto" $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ que satisface las ligaduras, a través de

$$\sum_{k=1}^N \vec{A}_k^\alpha \cdot \vec{w}_k = 0$$

• Principio de D'Alembert:

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \vec{R}_k \cdot \vec{w}_k = 0} \quad \leftarrow \text{POSTULADO.}$$

Para facilitar los razonamientos que vienen a continuación, agrupemos los vectores \vec{A}_k^α y \vec{w}_k de la siguiente forma:

$$\vec{w} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_N) \in \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3}_{N\text{-veces}} \cong \mathbb{R}^{3N} \quad (\text{vector})$$

Cada vector \vec{A}_k^α tiene 3 componentes

El índice k va de 1 hasta N

El índice α va de 1 hasta L

Podemos formar una matriz de L filas y $3N$ columnas:

$$A := \begin{pmatrix} \vec{A}_1^1 & \vec{A}_2^1 & \dots & \vec{A}_k^1 & \dots & \vec{A}_N^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vec{A}_1^\alpha & \vec{A}_2^\alpha & \dots & \vec{A}_k^\alpha & \dots & \vec{A}_N^\alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vec{A}_1^L & \vec{A}_2^L & \dots & \vec{A}_k^L & \dots & \vec{A}_N^L \end{pmatrix}$$

cada entrada es un vector fila.

L -filas

$3N$ -columnas

Definición

$\vec{w} \in \mathbb{R}^{3N}$ es un vector de desplazamiento virtual, si $\vec{w} \in \text{Ker } A$.

↪ Nótese que $A\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N \vec{A}_k^\alpha \cdot \vec{w}_k = 0 \quad \forall \alpha$.

Si también agrupamos a las fuerzas de reacción en un solo vector $\vec{R} = (\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, podemos expresar el principio de D'Alembert como

$$\vec{R} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{w} \in \text{Ker } A.$$

Esto quiere decir que $\vec{R} \in (\text{Ker } A)^\perp$ (complemento ortogonal). Pero el complemento ortogonal de $\text{Ker } A$ es generado por las filas de A . Esto es equivalente a decir que existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$ tales que, para cada k

$$\vec{R} = (\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_N) = \sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha (\vec{A}_1^\alpha, \dots, \vec{A}_N^\alpha),$$

es decir, tales que para cada $k \in \{1, \dots, N\}$,

$$\vec{R}_k = \sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha \vec{A}_k^\alpha$$

La 2da ley de Newton toma entonces la siguiente forma:

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k + \sum_{\alpha=1}^L \lambda_\alpha \vec{A}_k^\alpha \quad (1)$$

Para resolver las ecuaciones de movimiento, debemos determinar los "multiplicadores" λ_k . Esto se puede hacer de la siguiente forma.

Comenzamos por reescribir (1) así:

$$\frac{1}{m_k} \sum_{\alpha=1}^L \lambda_{\alpha} \vec{A}_{k\alpha} = \ddot{\vec{r}}_k - \frac{1}{m_k} \vec{F}_k \quad (2)$$

Luego multiplicamos (2) por \vec{A}_k^{β} y sumamos sobre k :

$$\sum_{\alpha=1}^L \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \vec{A}_{k\alpha} \cdot \vec{A}_k^{\beta} \right) \lambda_{\alpha} = \underbrace{\sum_{k=1}^N \vec{A}_k^{\beta} \cdot \ddot{\vec{r}}_k}_{(*)} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \vec{A}_k^{\beta} \cdot \vec{F}_k \quad (3)$$

Para eliminar (*) de (3), tomamos la derivada total (respecto a t) de la ecuación de ligadura:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N \vec{A}_k^{\alpha} \cdot \dot{\vec{r}}_k + B^{\alpha} \right) = 0$$

(recordar que $\vec{A}_k^{\alpha} = \vec{A}_k^{\alpha}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$ y lo mismo para B^{α})

↳ Obtenemos:

$$\sum_{k=1}^N \vec{A}_k^{\alpha} \cdot \ddot{\vec{r}}_k + \underbrace{\sum_{k=1}^N \dot{\vec{A}}_k^{\alpha} \cdot \dot{\vec{r}}_k}_{=: C^{\alpha}(t)} + \dot{B}^{\alpha} = 0$$

$$\hookrightarrow C^{\alpha}(t) = C^{\alpha}(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_n(t), \dot{\vec{r}}_1(t), \dots, \dot{\vec{r}}_n(t), t)$$

$$\hookrightarrow \sum_{k=1}^N \vec{A}_k^{\alpha} \cdot \ddot{\vec{r}}_k = \underbrace{-C^{\alpha}}_{\uparrow \text{insertar en (3)}}$$

⇒

$$\sum_{\alpha=1}^L \left(\underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \vec{A}_k^\alpha \cdot \vec{A}_k^\beta}_{=: M^{\alpha\beta}} \right) \lambda_\alpha = - \underbrace{\left(C^\beta + \sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \vec{A}_k^\beta \cdot \vec{F}_k \right)}_{=: D^\beta}$$

→ Con $\vec{D} = (D^1, \dots, D^L)$, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_L)$ y $IM = (M^{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$, obtenemos una ecuación matricial:

$$IM \vec{\lambda} = \vec{D}.$$

Afirmación: IM es invertible.

Dem.

Para $\vec{u} = (u_1, \dots, u_L) \in \mathbb{R}^L$, tenemos:

$$\begin{aligned} (\vec{u}, IM\vec{u}) &= \sum_{\alpha=1}^L \sum_{\beta=1}^L u_\alpha M^{\alpha\beta} u_\beta \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \left\| \sum_{\alpha=1}^L u_\alpha \vec{A}_k^\alpha \right\|^2. \end{aligned}$$

Pero tener $\sum_{\alpha=1}^L u_\alpha \vec{A}_k^\alpha = 0$ para todo k (que es el caso

si $(\vec{u}, IM\vec{u}) = 0$) es lo mismo que decir que existe una combinación lineal de las filas de A que es cero.

Por hipótesis dichas filas son linealmente independientes, luego $u_\alpha = 0 \forall \alpha$.

Concluimos: $(\vec{u}, IM\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$, luego IM invertible.

Obtenemos finalmente:

$$\vec{\lambda} = IM^{-1} \vec{D} \rightarrow \text{función de } \vec{r}_k \text{ y } \dot{\vec{r}}_k, 1 \leq k \leq N.$$

En la referencia citada arriba se muestra la equivalencia entre la formulación Newtoniana y la formulación haciendo uso del principio de D'Alembert.

A nosotros lo que nos interesa es la siguiente consecuencia del principio de D'Alembert:
(inmediata!!)

$$\sum_{k=1}^N (m_k \ddot{\vec{r}}_k - \vec{F}_k) \cdot \vec{w}_k = 0$$

para $\vec{w} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N)$ cualquier desplazamiento virtual.

Mostremos ahora que este resultado puede ser usado para deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange (en el caso especial en que las fuerzas \vec{F}_i sean conservativas)

↳ Vamos a considerar el siguiente caso (holonóm + escler.)

Ligaduras: $f^\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0$, $\alpha = 1, \dots, L$.

Si f^1, \dots, f^L son independientes (matriz de derivadas de rango máximo), las coordenadas \vec{r}_i se pueden expresar localmente en función de

$$n = 3N - L$$

variables independientes, que llamaremos q_1, q_2, \dots, q_n .

Esto es consecuencia del teorema de la función implícita

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, N$$

Velocidades virtuales:

$$\vec{w} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N) \equiv (\delta \vec{r}_1, \dots, \delta \vec{r}_N)$$

↑
notación !!

Prin D'Alembert:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Los vectores $\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2, \dots, \delta \vec{r}_N$ no son independientes, pero las variables q_1, \dots, q_n sí lo son.

↳ Escribir todo en términos de δq_i :

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (\text{suma implícita sobre } k)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \quad (i)$$

Así mismo,

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \quad (ii)$$

Al igualar (i) y (ii), usando la indep. de las coord. q_k , obtenemos

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (*)$$

→ Lado derecho de (*):

Nótese que $\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right)$, luego

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k}}_{(a)} \right) - \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^n m_i \left[\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \right]}_{(b)} \dot{q}_s$$

Por otro lado \rightarrow

Energía cinética:

$$T := \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k,s=1}^n \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_k \dot{q}_s$$

$$\bullet \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k,s=1}^n m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_s} \right) (\delta_{k,s} \dot{q}_s + \delta_{s,k} \dot{q}_k)$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \sum_{s=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

(a) ver arriba!

$$\bullet \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \sum_{k,s=1}^n \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial \dot{q}_s} \right) \dot{q}_k \dot{q}_s$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^n m_i \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial \dot{q}_s} \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) \dot{q}_s$$

(b) ver arriba!

Por lo tanto, a partir de (*) hemos obtenido:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

Finalmente, para fuerzas conservativas, $\vec{F}_i = -\nabla_{\vec{r}_i} U$, de tal forma que

$$\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

$$U = U(q_1, \dots, q_n)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - U) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

Definiendo $L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) := T - U$, obtenemos las ecs. de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}}$$

