Física de Partículas (FISI-3152) - A. Reyes - Tarea 2 (2018-I)

Solamente se deben entregar los ejercicios marcados con asterisco: “ * ”.

***1.** Muestre, <u>usando el teorema de Noether</u>, que la densidad de probabilidad

$$\rho(x) = \mid \psi(x) \mid^2,$$

para $\psi(x)$ una función de onda de Schrödinger, satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\jmath} = 0,$$

donde $\vec{\jmath}$ es la *corriente de probabilidad* $\vec{\jmath} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right)$.

***2.** Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ (M: espacio de Minkowski) un campo *escalar real*, solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a una densidad Lagrangiana que depende solamente del campo y de sus primeras derivadas:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \tag{1}$$

Como es bien sabido, las leyes de conservación de energía y de momento son consecuencia de la homogeneidad del espacio-tiempo. Dicha homogeneidad se puede imponer en una teoría de campos exigiendo que la acción sea invariante bajo traslaciones $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$. Esto implica que la variación $\delta\mathcal{L}$ del Lagrangiano debe ser, a lo sumo, un término de la forma $\partial_\mu J^\mu$ (¿por qué?). Asumiendo que $\mathcal{L}$ es de la forma (1) y que φ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, muestre que $\delta\mathcal{L}$ es, en efecto, de la forma $\partial_\mu J^\mu$ (exprese J^μ en términos de $\delta\varphi$). Calcule ahora, usando una aproximación de Taylor, las variaciones $\delta\varphi$ y $\delta\mathcal{L}$, para el caso específico $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$. Comparando las dos expresiones obtenidas para $\delta\mathcal{L}$, concluya que el tensor de eneregía-momento, definido como

$$T_{\mu\nu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu}\mathcal{L},$$

satisface la ecuación de continuidad

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0. \tag{2}$$

3. Muestre explícitamente que el campo escalar, que obedece la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0,$$

es covariante bajo transformaciones de Lorentz. Es decir, muestre que bajo la acción de una transformación de Lorentz $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, es posible obtener una regla bien definida de transformación para el campo ($\varphi \mapsto \varphi'$) de tal forma que el campo transformado φ' obedece la misma ecuación diferencial, pero en la nuevas variables x'^μ.

4.Obtenga la siguiente identidad para la distribución de Dirac ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$\delta(a^2 - b^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(a+b) + \delta(a-b)).$$

Esta tarea debe ser desarrollada (y entregada) en grupos de mínimo 2 personas, máximo 3. Fecha de entrega: **Miércoles 28 de febrero, en clase**.