

Física de Partículas (FISI-3152) - A. Reyes - Tarea 1 (2018-I)

Solamente se deben entregar los ejercicios marcados con asterisco: “ * ”.

***1.** En dos dimensiones espacio-temporales (una de tiempo y una de espacio), las transformaciones de Lorentz “puras” (*boosts*) se pueden expresar por medio de matrices 2×2 , de la siguiente forma:

$$L(u) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma u \\ \gamma u & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} u^2 \end{pmatrix},$$

donde se entiende que $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2}$ (para este ejercicio, asuma $c \equiv 1$). Muestre que la composición de dos *boosts* es de nuevo un *boost*. Es decir, si u y v representan dos velocidades (en una dimensión espacial), encuentre aquella velocidad w tal que $L(u)L(v) = L(w)$. ¿Cambia el resultado si se invierte el orden de u y v ? Considere ahora cuatro dimensiones espacio-temporales. Si \vec{u} es el vector que determina un *boost*, siguiendo Scheck (Mechanics, cap. 4) vemos que es conveniente expresar la transformación de Lorentz correspondiente de la siguiente forma:

$$L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \langle \vec{v} | \\ \gamma | \vec{v} \rangle & \mathbb{1}_{3 \times 3} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} |\vec{v}\rangle \langle \vec{v}| \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Muestre que si \vec{u} y \vec{v} son vectores paralelos (ó antiparalelos), entonces $L(\vec{u})L(\vec{v})$ es de nuevo un *boost*. Encuentre la regla de adición de velocidades para este caso. ¿Qué sucede en el caso en que \vec{u} y \vec{v} no necesariamente sean paralelos/antiparalelos?

***2.** La expresión (1) del ejercicio anterior para una transformación de Lorentz pura, ha sido escrita en *unidades naturales* (para las cuales se tiene $c = 1$). Sustituyendo \vec{v} por \vec{v}/c se puede obtener la expresión general para $L(\vec{v})$, incluyendo factores dimensionales. Teniendo en cuenta que para la componente temporal de un 4-vector se tiene $x^0 = ct$, y para las espaciales $(x^1, x^2, x^3) = \vec{x}$, muestre que, en el límite en que $c \rightarrow \infty$ (o de forma equivalente, en el límite de bajas velocidades), la transformación $L(v)$ toma la forma de una transformación de Galileo.

3. Considere una partícula A que se encuentra en reposo, y que tiene masa m_A . Dicha partícula decae en otras dos partículas B y C , cuyas masas en reposo son, respectivamente, m_B y m_C . Encuentre las energías de las partículas B y C luego del decaimiento. Calcule $\|\vec{p}_B\|$ y $\|\vec{p}_C\|$. ¿Qué sucede si $m_A < m_B + m_C$?

4. Verifique que las matrices \mathbb{M} y \mathbb{N} definidas en las ecuaciones (2.7) y (2.8) de las notas de clase en efecto satisfacen las relaciones

$$\mathbb{N}^2 = \mathbb{M}, \quad \mathbb{N}^3 = -\mathbb{N}, \quad \mathbb{N}^4 = -\mathbb{M}, \quad \mathbb{N}^5 = \mathbb{N}, \dots$$

y que, por lo tanto, la ecuación (2.9) toma la forma:

$$\vec{x}' = e^{-\varphi \mathbb{N}} \vec{x}.$$

5. Muestre que para los generadores infinitesimales de $SO(3)$ (ver notas de clase) se cumple:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1}_3 - \frac{\varphi}{N} \hat{n} \cdot \vec{J} \right)^N = e^{-\varphi \hat{n} \cdot \vec{J}}.$$

Esta tarea debe ser desarrollada (y entregada) en grupos de mínimo 2 personas, máximo 3. Fecha de entrega: **Miércoles 14 de febrero, en clase.**