Andrés Reyes

El campo escalar: descomposición en modos de Fourier

Para comenzar, vamos a introducir la siguiente clase de funciones (ondas planas):

$$\boxed{f_p(x) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip\cdot x}\Big|_{p^0=E_p}.} \quad \rightarrow f_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(E_p t - \vec{x}\cdot\vec{p})} \qquad (1)$$

Daremos por entendido que estas ondas planas siempre van evaluadas "on-shell", es decir, que $p\cdot x$ siempre es igual a $E_p x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x}$, donde $E_p := \sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}$.

Es un ejercicio sencillo verificar que las funciones f_p así definidas son soluciones a la ecuación de Klein-Gordon.

Como veremos, resulta conveniente trabajar en el espacio de Fourier. Para esto, consideremos la transformada de Fourier 4-dimensional:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^4p \; e^{ip\cdot x}\, \tilde{\varphi}(p), \quad (n=4)} \qquad (2)$$

La integral se realiza sobre <u>todos</u> los valores posibles : $d^4p = dp^0 \cdot d^3\vec{p}$; del mismo modo, las ondas planas aquí <u>no</u> llevan restricciones: $e^{ip\cdot x} = e^{i(p^0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})}$.

Por ahora nos interesa obtener soluciones <u>reales</u> de la ec. de K-G.

Para que $\varphi(x)$ sea real, debemos exigir que se cumpla la siguiente condición:

$$\tilde{\varphi}(-p) = \tilde{\varphi}(p)^* ,$$

donde "$*$" significa complejo conjugado.

Aplicando el operador $(\Box + m^2)$ a la expansión de Fourier de $\varphi(x)$ (ec. (2) en la página anterior) vemos que para que $\varphi(x)$ sea solución de la ec. de Klein-Gordon es suficiente imponer la condición $p^2 = m^2$ ("on-shell")

→ <u>Ejercicio</u>: verificar la afirmación anterior.

Por esta razón resulta conveniente considerar el siguiente ansatz :

$$\tilde{\varphi}(p) = (2\pi)^{1/2}\, \delta(p^2 - m^2)\, a(p) \, .$$

En otras palabras, la afirmación es que

$$\varphi(x) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{(2\pi)^2} \int d^4p \; e^{ip\cdot x}\, \delta(p^2 - m^2)\, a(p) \qquad (3)$$

es solución de la ec. de K-G.

La cuestión de si esta es la solución más general, la dejaremos de lado por ahora.

Por ahora, procedamos a analizar en más detalle esta expresión. Lo que nos interesa es obtener una separación de modos de Fourier que sea Lorentz invariante.

Recordemos la siguiente identidad:

$$\delta(a^2 - b^2) = \frac{1}{2|b|} \left(\delta(a+b) + \delta(a-b) \right) , \qquad (4)$$

válida para $a, b \in \mathbb{R}$ (ejercicio).

Como $p^2 - m^2$ es igual a $(p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2$, tomando $E_p = +\sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}$ (raíz positiva) podemos escribir: $p^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_p^2$.

Haciendo uso de la identidad, obtenemos:

$$\delta(p^2-m^2) = \delta((p^0)^2 - E_p^2) = \frac{1}{2E_p}\left(\delta(p^0+E_p) + \delta(p^0-E_p)\right),$$

recordar que $\underline{\underline{E_p > 0}}$.

de donde

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^4p}{2E_p}\, e^{ip\cdot x}\left(\underbrace{\delta(p^0+E_p)}_{p^0=-E_p} + \underbrace{\delta(p^0-E_p)}_{p^0=E_p}\right) a(p)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{p}}{2|E_p|}\left(a(p)\, e^{ip\cdot x}\Big|_{p^0=-E_p} + a(p)\, e^{ip\cdot x}\Big|_{p^0=E_p}\right)$$

Veamos con cuidado lo que resulta de cada término en el integrando:

- $p^0 = -E_p \;\rightarrow\; a(p^0,\vec{p})\, e^{i(p^0x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})}\Big|_{p^0=-E_p} = a(-E_p,\vec{p})\, e^{-iE_px^0}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

- $p^0 = +E_p \;\rightarrow\; a(p^0,\vec{p})\, e^{i(p^0x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})}\Big|_{p^0=E_p} = a(E_p,\vec{p})\, e^{iE_px^0}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

Es decir, tenemos:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\left(a(-E_p,\vec{p})\, e^{-iE_px^0}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a(E_p,\vec{p})\, e^{iE_px^0}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)$$

Ahora, como la integración sobre $\vec{p}$ se lleva a cabo sobre todo $\mathbb{R}^3$ y como E_p es par en $\vec{p}$, podemos realizar el cambio de variable $\vec{p} \to -\vec{p}$ en la primera integral, para obtener:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(a(-E_p,-\vec{p})\, e^{-i(E_p x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})} + a(E_p,\vec{p})\, e^{i(E_p x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})} \right)$$

Recordando la condición de que φ sea un campo real $(\tilde{\varphi}(-p) = \tilde{\varphi}(p)^*)$, vemos que necesariamente se debe tener:

$$a(-E_p,-\vec{p}) = a(E_p,\vec{p})^* .$$

Por esta razón, definamos

$$a_{\vec{p}} \equiv a_p := a(E_p,\vec{p}) .$$

Con esto podemos escribir, de forma compacta:

$$\boxed{\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(f_{\vec{p}}(x)\, a^*_{\vec{p}} + f^*_{\vec{p}}(x)\, a_{\vec{p}} \right)} \qquad (5)$$

Es un buen ejercicio expresar las funciones a_p en términos del campo φ y sus derivadas.

Para esto comenzamos por mostrar que la siguiente expresión es independiente de t:

$$I = \int d^3\vec{x}\, f_p(x)\,\left(E_p\,\varphi(x) - i\,\dot{\varphi}(x)\right).$$

Veamos

$$\partial_t I = \int d^3\vec{x}\left[\partial_t f_p(x)\left(E_p\varphi(x) - i\dot{\varphi}(x)\right) + f_p(x)\left(E_p\dot{\varphi}(x) - i\ddot{\varphi}(x)\right)\right]$$

$$= \int d^3x\left[-iE_p f_p(x)\left(E_p\varphi(x) - \cancel{i\dot{\varphi}(x)}\right) + f_p(x)\left(\cancel{E_p\dot{\varphi}(x)} - i\ddot{\varphi}(x)\right)\right]$$

Estos 2 términos se cancelan...

$$= -i\int d^3x\, f_p(x)\left(\underbrace{E_p^2\varphi(x) + \ddot{\varphi}(x)}\right)$$

$$= (m^2 + \vec{p}^{\,2})\varphi(x) + \ddot{\varphi}(x)$$

Aquí asumo que φ es sol. de la ec. de K-G.

$$= (m^2 + \partial_0\partial^0)\varphi(x) + \vec{p}^{\,2}\varphi(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(\partial_i)^2\varphi(x) + \vec{p}^{\,2}\varphi(x)$$

$$= 0.$$

La afirmación es que justo la expresión anterior es $a(p)$.

Como ya hemos mostrado que es independiente de t, basta con mostrar que es igual a $a(\vec{p})$ en $t=0$:

Para esto procedemos de la siguiente forma ($I(t=0) \equiv I(t\neq 0)$)

$$I = \int d^3x \, f_p(0,\vec{x}) \left(E_p \varphi(0,\vec{x}) - i\dot{\varphi}(0,\vec{x}) \right).$$

De la expresión para $\varphi(x)$ en (5), calculamos:

$$\varphi(0,\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q} \left(\frac{e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}}}{(2\pi)^{3/2}} a^*_{\vec{q}} + \frac{e^{-i\vec{x}\cdot\vec{q}}}{(2\pi)^{3/2}} a_{\vec{q}} \right) \quad y$$

$$\dot{\varphi}(0,\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q} \left(-iE_q e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}} a^*_{\vec{q}} + iE_q e^{-i\vec{x}\cdot\vec{q}} a_{\vec{q}} \right).$$

Reemplazando estas 2 expresiones en la expresión para I de arriba, obtenemos:

$$I = \int d^3\vec{x} \, \frac{e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}}{(2\pi)^{3/2}} \left(E_p \int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q} \left(\frac{e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}}}{(2\pi)^{3/2}} a^*_{\vec{q}} + \frac{e^{-i\vec{x}\cdot\vec{q}}}{(2\pi)^{3/2}} a_{\vec{q}} \right) - i \int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q} \left(-iE_q e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}} a^*_{\vec{q}} + iE_q e^{-i\vec{x}\cdot\vec{q}} a_{\vec{q}} \right) \right)$$

Usando el hecho de que $\delta(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x}$,

lo anterior es equivalente a :

$$\int \frac{d^3\vec{q}}{2E_q}\left(\cancel{E_p\delta(\vec{q}+\vec{p})a^*_{\vec{q}}} + E_p\delta(\vec{p}-\vec{q})a_{\vec{q}} - \cancel{E_q\delta(\vec{q}+\vec{p})a^*_{\vec{q}}} + E_q\delta(\vec{p}-\vec{q})a_{\vec{q}}\right)$$

$$= a_{\vec{p}} \, .$$

Hemos obtenido :

$$\boxed{a_{\vec{p}} = \int d^3\vec{x}\, f_p(x)\left(E_p\varphi(x) - i\dot{\varphi}(x)\right)} \qquad (6)$$

Es aparente que cada escogencia de una función $\vec{p} \mapsto a_{\vec{p}}$ dará lugar a una solución $\varphi(x)$ de la ec. de K-G y que, como vemos en la ecuación anterior, cada solución $\varphi(x)$ da lugar a una función $a_{\vec{p}}$.

Conviene por lo tanto tratar de relacionar las funciones $a_{\vec{p}}$, $a^*_{\vec{p}}$ con el problema de Cauchy (problema de valores iniciales) de la ecuación.

$\longrightarrow$

• Condiciones iniciales:

Para poder hablar de una solución (en términos de unicidad) de la ecuación $(\Box + m^2)\varphi = 0$, debemos especificar condiciones iniciales ("Cauchy data").

Supongamos entonces que queremos resolver la ecuación, sújeta a las condiciones iniciales siguientes:

$$\varphi(0,\vec{x}) = g(\vec{x}) \quad , \quad \dot{\varphi}(0,\vec{x}) = h(\vec{x}) \quad .$$

Como estamos interesados en soluciones reales, supondremos que g y h son funciones reales.

Lo que buscamos es expresar a $\varphi(t,\vec{x})$ en términos de $g(\vec{x})$ y $h(\vec{x})$, así como relacionar $g(\vec{x})$ y $h(\vec{x})$ con los "coeficientes" de Fourier $a_{\vec{p}}$.

Una técnica muy útil para solucionar este tipo de ecuaciones, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, es la siguiente: vamos a considerar una transformada de Fourier "intermedia" para la cual la variable temporal se deja intacta y se transforman sólo las variables espaciales. Para estas transformadas usaremos el símbolo "$\wedge$".

De esta forma, si tenemos una función

$$F : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(t, \vec{x}) \longmapsto F(t,\vec{x}) \quad , \text{ definiremos}$$

$$\hat{F}_{\vec{p}}(t) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\, F(t,\vec{x})\, d^3\vec{x}$$

Notemos, de paso, que la condición de que $F(t,\vec{x})$ sea una función real se traduce en $\hat{F}_{-\vec{p}}(t) = \hat{F}_{\vec{p}}(t)^*$.

Si aplicamos esta transformada a una solución $\varphi(x)$ de la ec. de K-G, obtenemos:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\varphi(x) = 0 \iff (\partial_t)^2 \varphi = \left(\vec{\nabla}^2 - m^2\right)\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\hat{\varphi}}_{\vec{p}}(t) = -E_p^2\, \hat{\varphi}_{\vec{p}}(t)} \qquad (7)$$

Para un valor fijo de $\vec{p}$ esto no es más que la ec. de un oscilador armónico.

Para cada p tendremos entonces que especificar las condiciones iniciales. Esto equivale a especificar constantes A_p y B_p tales que

$$\hat{\varphi}_p(t) = A_p\, e^{iE_p t} + B_p\, e^{-iE_p t}$$

Recordando que las condiciones iniciales deseadas son $\varphi(0,\vec{x}) = g(\vec{x})$ y $\dot{\varphi}(0,\vec{x}) = h(\vec{x})$, es fácil ver que debemos tener

$$\left.\begin{aligned} \hat{\varphi}_p(0) &= A_p + B_p \overset{!}{=} \hat{g}_p \\ \dot{\hat{\varphi}}_p(0) &= iE_p(A_p - B_p) \overset{!}{=} \hat{h}_p \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} A_p &= \frac{1}{2}\left(\hat{g}_p + \frac{\hat{h}_p}{iE_p}\right) \\ B_p &= \frac{1}{2}\left(\hat{g}_p - \frac{\hat{h}_p}{iE_p}\right) \end{aligned}$$

Reemplazando A_p, B_p por las expresiones obtenidas, llegamos a:

$$\hat{\varphi}_p(t) = \frac{1}{2}\left(\left(\hat{g}_p - i\frac{\hat{h}_p}{E_p}\right)e^{iE_pt} + \left(\hat{g}_p + i\frac{\hat{h}_p}{E_p}\right)e^{-iE_pt}\right)$$

Consideremos ahora la transformada inversa. Debemos tener:

$$\varphi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}}\,\hat{\varphi}_p(t)\,d^3\vec{p}.$$

↘

$$\varphi(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3\vec{p}}{2}\left(e^{iE_pt}e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}}\left(\hat{g}_p - i\frac{\hat{h}_p}{E_p}\right) + \underbrace{e^{-iE_pt}e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}}}\left(\hat{g}_p + i\frac{\hat{h}_p}{E_p}\right)\right)$$

como h, g son reales, aquí podemos cambiar $\vec{p}$ por $-\vec{p}$, ~~Además~~ si cambiamos también $\hat{g}$ por $\hat{g}^*$, etc...

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p}\left(e^{i(E_pt - \vec{x}\cdot\vec{p})}(\hat{g}_pE_p - i\hat{h}_p) + e^{-i(E_pt-\vec{x}\cdot\vec{p})}\left(\hat{g}_p^* + i\frac{\hat{h}_p^*}{E_p}\right)E_p\right)$$

$\hat{g}E_p - i\hat{h}_p$

$\hat{g}_p^* = \hat{g}_{-p}$

$$\varphi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(f_p^*(x) \left(E_p \hat{g}_p - i\hat{h}_p \right) + f_p(x) \left(E_p \hat{g}_p - \hat{h}_p \right)^* \right).$$

Comparando con (5),

vemos que podemos hacer la siguiente identificación:

$$\boxed{a_p \equiv E_p \hat{g}_p - i\hat{h}_p} \qquad (8)$$

Esta identidad nos provee una forma alternativa de derivar la relación (6) de la pág 8.

$$a_p = E_p \hat{g}_p - i\hat{h}_p =$$

$$= E_p \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} g(\vec{x}) - i \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} h(\vec{x})$$

$$= \int d^3\vec{x} \, \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left(E_p \varphi(0,\vec{x}) - i\dot{\varphi}(0,\vec{x}) \right)$$

$$= \int d^3\vec{x} \, f_p(0,\vec{x}) \left(E_p \varphi(0,\vec{x}) - i\dot{\varphi}(0,\vec{x}) \right) = I(t=0).$$

Ya habíamos mostrado que $I(t)$ no depende de t, luego obtenemos, nuevamente:

$$a_p = \int d^3\vec{x} \, f_p(x) \left(E_p \varphi(x) - i\dot{\varphi}(x) \right).$$

Nota: La convención que hemos venido usando para a_p difiere de la notación en Scheck. ("Quantum Physics")
Lo que para nosotros es a_p, para Scheck es a_p^*.

Para estar de acuerdo con la notación en Scheck, vamos a cambiar nuestro "ansatz" al comienzo de la pág. 5.2 por este:

$$\tilde{\varphi}(p) = (2\pi)^{1/2}\, \delta(p^2 - m^2)\, a(p)^*$$

(el único cambio es $a \Leftrightarrow a^*$).

Todos los cálculos que hicimos previamente quedan intactos; sólo que al final debemos reemplazar en todas partes $a(p)$ por $a(p)^*$.

Entre otras cosas, ahora debemos escribir:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \frac{d^3p}{2E_p} \left(f_p(x)\, a_p + f_p^*(x)\, a_p^* \right) \\ a_p &= \int d^3\vec{x}\; f_p^*(x) \left(E_p \varphi(x) + i\dot{\varphi}(x) \right) \end{aligned}} \qquad (9)$$

Comparemos, p. ej., con la ec. (7.32) en Scheck :

"Quantum Physics"

$$a_p \overset{!}{=} i \int d^3x \, f_p^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \varphi(x)$$

$$= i \int d^3x \left(f_p^*(x) \, \dot{\varphi}(x) - \dot{f}_p^*(x) \, \varphi(x) \right)$$

$$= \int d^3x \, f_p^*(x) \left(i \dot{\varphi}(x) - i^2 E_p \varphi(x) \right) \ldots$$ ok . .

Usaremos esta convención de ahora en adelante . . .