

El origen de las ecuaciones relativistas.

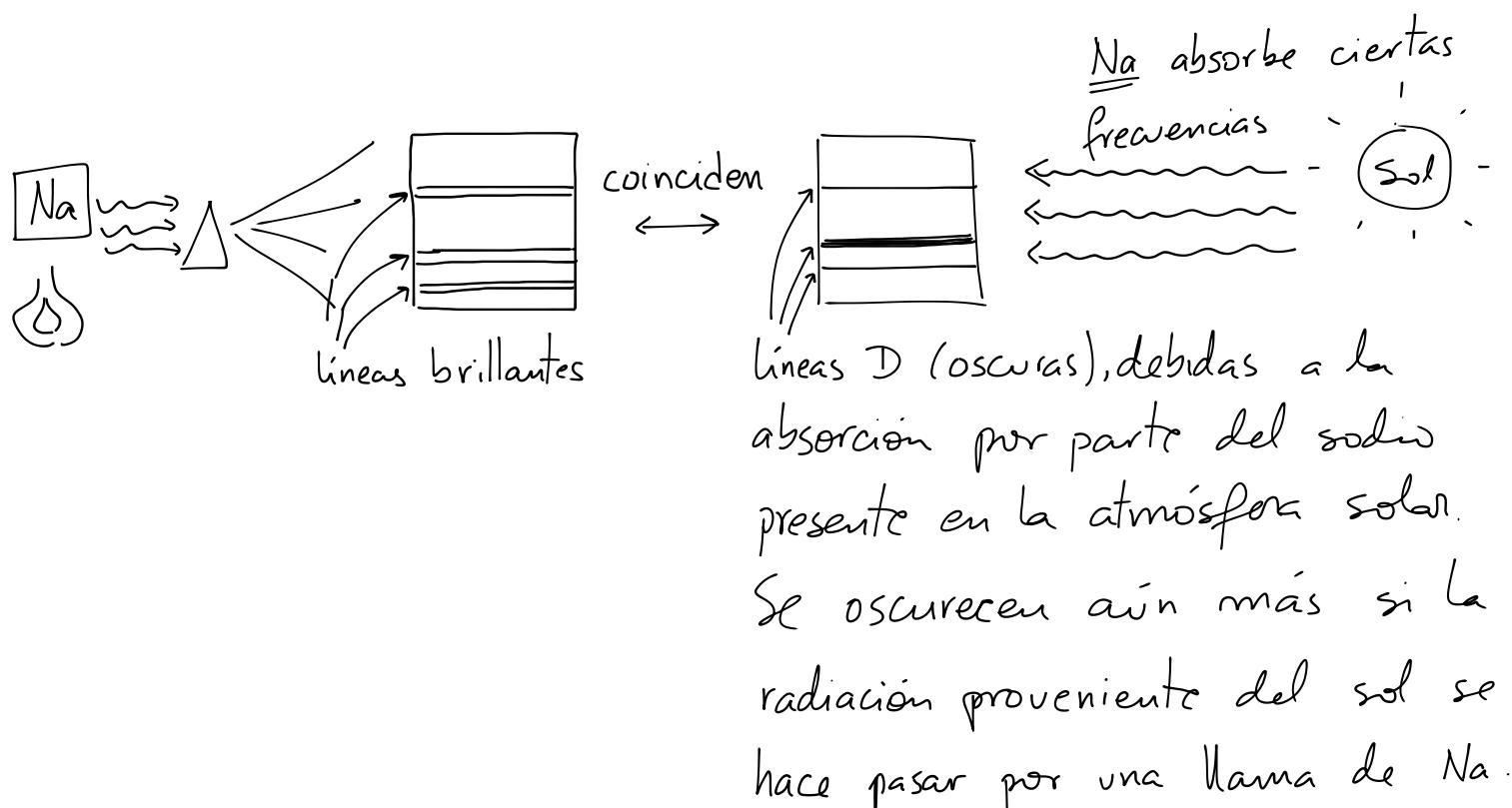
Andrés Reyes

Previamente en este curso hemos mencionado que es posible usar las representaciones unitarias e irreducibles del grupo de Poincaré para representar matemáticamente la noción de "partícula elemental". Aunque aún no hemos presentado el análisis, es conveniente mencionar cuál será el resultado:

Las representaciones unitarias e irreducibles del grupo de Poincaré están "etiquetadas" por dos parámetros: (i) un número real (m) que físicamente representa la masa de la partícula, y (ii) un número entero o semi-entero (s) que representa el spin de la partícula. Por supuesto, en el curso de nuestro análisis tendremos que especificar cómo entran en esta descripción otros parámetros, o números cuánticos que sabemos corresponden a las partículas elementales. Pero, antes de continuar con este análisis, nos detendremos para hacer un breve recuento, de tipo histórico, de algunos de los hallazgos experimentales más relevantes que están detrás del descubrimiento del electrón, que sin lugar a dudas puede ser considerada la primera partícula elemental que haya sido observada.

- 1664-66, Isaac Newton: descomposición de la luz en colores, utilizando prismas.
 - ca. 1753, Thomas Melvill: estudia, utilizando prismas, el espectro de luz emitida por una muestra de sodio (Na) al ser calentada. Observa líneas discretas en el espectro (espectro de emisión).
 - 1814-15, Joseph von Fraunhofer: estudio detallado del espectro de radiación proveniente del sol (más de 600 líneas).
 - 1850-1860, Gustav Kirchhoff/Robert Bunsen:
 - Bunsen utiliza el mechero que lleva su nombre, y que produce una llama sin color de alta temperatura, para analizar sales e intentar caracterizarlas de acuerdo al color de la radiación que emiten. Kirchhoff propone usar espectroscopios (construidos en ese momento a partir de prismas), lo cual llevó al descubrimiento de nuevos elementos químicos.
- Kirchhoff, en 1859, logró explicar la presencia de las denominadas líneas D del

espectro solar, demostrando así la presencia de sodio en la atmósfera solar, y dando nacimiento a la astrofísica:



- 1868, Pierre Janssen, observa líneas de hidrógeno en el sol, durante un eclipse solar en la India. Descubre también un nuevo espectro, desconocido en el momento en la Tierra (Helio, descubierto en 1895 en la Tierra).

- ca. 1860, Dmitri Mendeleiev, propone/descubre la Tabla Periódica.

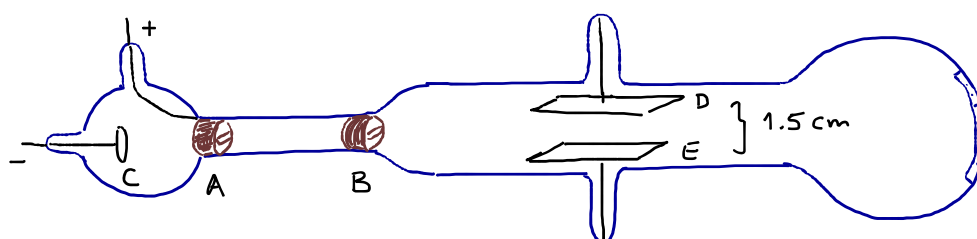
Hacia mediados del siglo XIX, Maxwell había completado su teoría electromagnética, Dalton había propuesto su teoría atómica, y el estudio de las líneas espectrales había dado lugar al descubrimiento de diversos elementos químicos. Pero hasta ese momento, no había evidencia directa de partículas elementales, no había claridad acerca de la naturaleza de la corriente eléctrica y, por supuesto, no había mayores razones para dudar de la validez de la física hasta ese momento conocida. Todo esto cambió con los descubrimientos que tuvieron lugar durante la segunda mitad del siglo XIX, que incluyeron la generación de radiación electromagnética, el efecto fotoeléctrico (Hertz, 1887), el descubrimiento de la radioactividad (Bequerel, 1896), de los rayos X (Röntgen, 1896).

En medio de las controversias suscitadas por dichos descubrimientos, estaba también la relacionada con la naturaleza de los rayos catódicos, y su (en ese entonces hipotética) relación con un "cuanto" elemental de carga/corriente eléctrica, del que ya se tenían ciertos indicios provenientes del estudio de fenómenos de electrólisis.

Este era, de cierta forma, el panorama en el momento en que J.J. Thomson realizó su gran descubrimiento del electrón:

Descubrimiento del electrón (Joseph John Thomson, 1897-99)

George Stoney (irlandés) ~1874: basado en los estudios previos de Faraday sobre electrólisis, propone la existencia de una "unidad de electricidad"
 → Introdujo el nombre "electrón"



Tubo de rayos catódicos

- Generación de vacío dentro del tubo que permitiera observar trayectorias "rectilíneas"?

→ J.H.W. Geissler (1865): técnicas de vacío ($\sim 10^{-5}$ atm)

- Generación de voltajes suficientemente altos?

→ H.D. Ruhmkorff (~1850) generación de voltajes del orden de kV con su bobina de inducción (corriente directa!)

Thomson: - Medición de $\frac{e}{m} \approx 770$ veces el valor para H.
 - Medición de e , basándose en trabajos de Townsend, Wilson ("cámara de niebla") \rightarrow Obtuvo:
 $e \approx 6.8 \times 10^{-10} \text{ esu} \approx \frac{6.8 \times 10^{-10}}{3 \times 10^9} \text{ C} = 2.26 \times 10^{-19} \text{ C}$, un resultado con el orden de magnitud correcto

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} (\sim 0.51 \text{ MeV})$$

$$q_e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

(1)

Estas mediciones de la carga y masa del electrón pueden considerarse como las que marcaron el descubrimiento de la primera partícula elemental: el electrón (Thomson, 1897-1899).

En este mismo periodo se descubrieron los "rayos X", así como la radioactividad. Estos descubrimientos generaron una gran confusión. Por un lado, Hertz había demostrado la existencia de ondas electromagnéticas, confirmando así la teoría de Maxwell. Sin embargo, no se podía concluir que los rayos X fueran ondas electromagnéticas, ya que no se observaban fenómenos de refracción ni de polarización (hoy en día sabemos que esto se debía a la muy corta longitud de onda de los rayos X, en comparación con la luz visible). Por otro lado estaba la radiación emitida por los recién descubiertos elementos radioactivos, que tenía la curiosa propiedad de ser emitida "de forma aleatoria". También de ese período provienen las primeras observaciones del efecto fotoeléctrico.

Todos estos fenómenos observados llevaron eventualmente al desarrollo de la mecánica cuántica. Es por lo tanto un poco difícil discutir el desarrollo de la física de partículas sin pasar por la historia de la mecánica cuántica. Es cierto, sin embargo, que la explicación satisfactoria de estos fenómenos sub-/atómicos solo llegó varias décadas después de los descubrimientos experimentales. Esto debido a que los fenómenos a escala subatómica requieren de un tratamiento a la vez cuántico y relativista, y resultó siendo mucho más rápido el desarrollo de la mecánica cuántica no-relativista, algo que a su vez llevó a que el formalismo

no-relativista de una partícula desarrollado por Schrödinger, Heisenberg, Dirac, etc., se estableciera de manera general, algo que vemos hoy en día reflejado en los programas de los cursos de mecánica cuántica, que tan solo se ocupan del dominio relativista en un nivel "avanzado".

En este curso hemos elegido un camino diferente al introducir directamente el concepto de partícula a través de las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré. Esta formulación es debida básicamente al trabajo de Wigner de los años 40 y, como veremos, incorpora de manera satisfactoria el principio de relatividad especial dentro del formalismo usual de la mecánica cuántica.

El concepto de "campo cuántico" surgió mucho antes del concepto de partícula de Wigner, como consecuencia de una serie de intentos por encontrar una descripción cuántica (y, necesariamente, relativista) del campo electromagnético. Más adelante veremos cuál es la relación entre todos estos enfoques. Por ahora haremos un breve recuento de una de las formas en que es posible llegar a las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac, a partir de intentos (infructuosos) por obtener una ecuación "tipo Schrödinger" para una partícula masiva, relativista. Este es, podríamos decir, el enfoque histórico y contiene una serie de argumentos de tipo heurístico de gran elegancia e importancia histórica.

→ La ecuación de Klein-Gordon

(Idea → razonamiento heurístico):

$$(mc^2)^2 = E^2 - (\vec{p}c)^2 \quad ; \quad "E \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}" \quad , \quad "\vec{p} \leftrightarrow -i\hbar \vec{\nabla}"$$

$$\hookrightarrow \text{"Reemplazar"} \rightarrow (mc^2)^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2 \hbar^2 \vec{\nabla}^2$$

$$\hookrightarrow \hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial^2}{(\partial(ct))^2} - \vec{\nabla}^2 \right) + m^2 c^4 = 0$$

$$\rightsquigarrow \left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \varphi(x) = 0 \quad , \quad c \equiv \hbar \equiv 1$$

→ Ec. Klein-Gordon:

$$\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0} \quad (2)$$

- La densidad $|\varphi(x)|^2$ no es constante en el tiempo!
→ problemas con la interpretación de $|\varphi(x)|^2$ como densidad de probabilidad.
- Corriente conservada?
- En la ec. Schrödinger: $\rho(x) = |\psi(x)|^2$,

$$\vec{j}(x) = \frac{-i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

Ecuación de continuidad: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow$ conserv. probabilidad.

- En la ec. K-G: $j^\mu = i(\varphi^* \partial^\mu \varphi - (\partial^\mu \varphi^*) \varphi)$

Ec. continuidad → $\partial_\mu j^\mu = 0$. corriente conservada que se obtiene al aplicar el ppio. de mínima acción a la ec. de K-G.

→ Densidad: $j^0 = i(\varphi^* \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^* \varphi)$ ↖ j^0 no es positiva def.

⇒ j^0 no puede representar una densidad de probabilidad!

La ecuación de Dirac (1928)

La forma como Dirac enfrentó el problema de interpretación de la ec. de Klein-Gordon fue buscando una ecuación relativista de primer orden en todas las variables espacio-temporales. Las razones eran, por un lado, que parte de los problemas de la ec. de Klein-Gordon provenían del hecho de que las derivadas respecto a "t" eran de orden 2 (en la ec. de Schrödinger son de orden uno) y, por otro lado, si esto era así, entonces el principio de relatividad exigía que todas las variables espacio-temporales aparecieran en derivadas del mismo orden (= 1).

↳ Dirac → nueva ecuación, de primer orden tanto en t, como en \vec{x} , pero relativista:

Ansatz: Buscamos que los operadores que corresponden a energía ($i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$) y momento ($-i\hbar\vec{\nabla}$) aparezcan en la ec. de movimiento de forma "balanceada".

$$(mc^2)^2 = E^2 - (\vec{p}c)^2 \rightarrow E = \pm c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$$

→ Queremos energías positivas, así que tomamos $+\sqrt{\quad}$.

$$\hookrightarrow \frac{E}{c} - \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2} = 0 \quad (3)$$

Si multiplicamos (3) por $\frac{E}{c} + \sqrt{\dots}$, obtenemos $\frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2 + \vec{p}^2$

Ahora, si pensamos en que P^0, P^1, P^2, P^3 sean operadores, lo más conveniente es "linearizar" el término $\sqrt{\dots}$ \longrightarrow

Esperamos algo de la forma $\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} = \beta + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$

\uparrow a esto nos referimos con la expresión "linearizar"

\rightarrow Queremos entonces:

$$\left(\frac{E}{c} + \sqrt{\dots}\right)\left(\frac{E}{c} - \sqrt{\dots}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{E}{c} + \beta + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}\right)\left(\frac{E}{c} - \beta - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}\right)\psi = 0$$

$$\left(\frac{E^2}{c^2} - \beta^2 - \underbrace{(\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \beta)}_{= 0?} - \underbrace{(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})}_{= \vec{p}^2?}\right)\psi = 0$$

\rightarrow Entonces, si asumimos que $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son matrices tales que

$$\beta \alpha_i + \alpha_i \beta = 0, \quad \beta^2 = m^2 c^2, \quad \alpha_i^2 = 1, \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (i \neq j),$$

$$\text{obtendremos } \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 - \vec{p}^2\right)\psi = 0$$

\rightarrow Proponer una ec. lineal, de 1er orden:

$$\boxed{(i \gamma^m \partial_m - m)\psi = 0}, \quad (4)$$

$$\text{f.g. } \gamma^m \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^m = 2g^{m\nu} \quad (5)$$

\rightarrow Automáticamente satisface la ec. de K-G!

Veamos:

$$\begin{aligned}
 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 &\Rightarrow \underbrace{(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)} \psi = 0 \quad \rightarrow \\
 &= -\underbrace{\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu} \psi - m^2 \psi = 0 \quad -(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi = 0 \\
 &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu \\
 &\quad (\text{ya que } \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu)
 \end{aligned}$$

- Varios detalles sobre las ecuaciones de Dirac y de Klein-Gordon, sus interpretaciones y la necesidad de introducir el concepto de campo cuántico se pueden consultar en los siguientes documentos:

1) www.thep.physik.uni-mainz.de/~scheck/NestFS.ps

2) www.thep.physik.uni-mainz.de/~scheck/Reyes.ps

Una de las predicciones más interesantes de la ecuación de Dirac tiene que ver con el spin del electrón ($s=1/2$), concepto que surge, entre otros, a raíz del efecto Zeeman anómalo.

→ "Cuantización espacial" (Sommerfeld, 1923)

→ Experimento: Stern-Gerlach, 1922.

Idea de un "momento angular intrínseco":

→ Kronig (1925), pero no publicó hasta 1926, (des)motivado por Pauli !!

→ Uhlenbeck & Goudsmith (1925).

$$\mu_s = -g \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

$g \approx 2$, pero según la física clásica, se esperaría $g=1 \dots$ → Ec. Dirac predice $g=2!$

De lo discutido arriba, se hace evidente que no es posible interpretar la ec. de Klein-Gordon de la misma forma que la ecuación de Schrödinger. En particular, hemos visto que $|\varphi(x)|^2$ no puede ser interpretada como una densidad de probabilidad!

Algo similar ocurre con la ec. de Dirac (ver referencias), lo cual nos obliga a buscar una nueva interpretación. Bajo esta nueva interpretación, las soluciones $\varphi(x)$ de la ec. de Klein-Gordon, ó $\Psi(x)$ de la ecuación de Dirac asumirán un carácter de operadores. Esta interpretación nos llevará a una formulación consistente, donde la descripción matemática de procesos de decaimiento y transformación mutua entre partículas surge de manera natural.

Para un operador autoadjunto A en mecánica cuántica no-relativista, el valor esperado $\langle A \rangle$ representa una cantidad física observable.

En el caso de un campo cuántico $\varphi(x)$, donde ahora $\varphi(x)$ es un operador, los observables son operadores autoadjuntos, generalmente contruidos a partir de polinomios en el campo $\varphi(x)$.

Los operadores de campo serán operadores que actúan en un espacio de Hilbert (el espacio de Fock) que tiene la particularidad de permitirnos describir estados de un número arbitrario de partículas.

Problemas con la ecuación de Klein-Gordon:

- La cantidad $|\varphi(x)|^2$ no puede ser interpretada como una densidad de probabilidad.
- Aunque sí existe una densidad $j^0(x)$ asociada a la ec. de K-G que satisface una ecuación de continuidad, dicha densidad, dada por $j^0 = i(\varphi^* \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^* \varphi)$, no es definida positiva, haciendo imposible una interpretación en términos de densidad de probabilidad.

Aún si insistimos en interpretar a $\varphi(x)$ como una "función de onda", tendremos inconvenientes. Consideremos por ejemplo soluciones en forma de ondas planas:

$$\varphi(x) = e^{-ip \cdot x}, \quad (6)$$

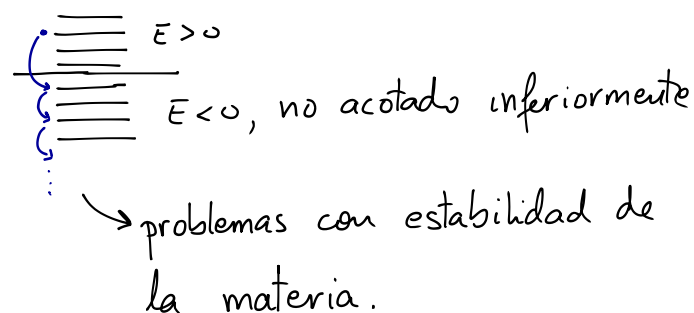
donde $p \cdot x = p^\mu x_\mu = \dot{p} x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$

¿Qué pasa si exigimos que (6) sea solución de la ec. de Klein-Gordon?

→ Un cálculo sencillo nos muestra que p debe cumplir $\vec{p}^2 = m^2$.

$$\hookrightarrow (\dot{p}^0)^2 = m^2 + \vec{p}^2 \longrightarrow E \equiv \dot{p}^0 = \pm \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad (7)$$

⇒ Energías positivas y negativas:



Estos fueron los problemas que Dirac buscaba evitar y que lo llevaron a proponer la ec. que lleva su nombre.

Es fácil verificar que la ecuación de Dirac también admite soluciones en ondas planas que tendrían interpretación como estados de energías positivas y negativas.

La solución que Dirac dio a este problema está basada en una propiedad de la ecuación, que permite interpretar las soluciones de energía negativa se refieren a partículas de carga opuesta a la carga del electrón.

Para una argumentación detallada, vale la pena referirse a los escritos originales de Dirac. Para nuestros propósitos será suficiente tener en cuenta la siguiente cita (Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics"):

"In this way we are led to infer that the negative-energy solutions of (*) refer to the motion of a new kind of particle having the mass of an electron and the opposite charge. Such particles have been observed experimentally and are called positrons. We cannot, however, simply assert that the negative-energy solutions represent positrons, as this would make the dynamical relations all wrong. For instance, it is certainly not true that a positron has a negative kinetic energy. We must therefore establish the theory of the positrons on a somewhat different footing. We assume that nearly all the negative-energy states are occupied, with one electron in each state in accordance with the exclusion principle of Pauli. An unoccupied negative-energy state will now appear as something with a positive energy, since to make it disappear, i.e. to fill it up, we should have to add to it an electron with negative energy. We assume that these unoccupied negative-energy states are the positrons."

Teniendo en cuenta lo anterior, vemos que tampoco es posible dar una interpretación de la ec. de Dirac en términos de una función de onda de una partícula.

Todos estos problemas son ampliamente superados si consideramos a las soluciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ de dichas ecuaciones como campos cuánticos.

Antes de hacer esto, resultará conveniente estudiar la dinámica clásica asociada a estas ecuaciones.

→ La ec. de Klein-Gordon como una ec. de campo clásica.

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi(x) \quad (8)$$

Vamos a considerar la ec. (8) como correspondiente a un sistema dinámico clásico. Para esto, recordamos el principio de mínima acción que, en el caso de un campo clásico (sistema dinámico con número infinito de grados de libertad) corresponde a la solución del problema variacional basado en la acción

$$I[\varphi] := \int dt \int d\vec{x} \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)). \quad (9)$$

La solución a este problema variacional está dada por las ecs. de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \quad (10)$$

Para la ec. de Klein-Gordon, escogemos la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) := \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (11)$$

Las ecs. de Euler-Lagrange correspondientes a (11) tienen como solución la ec. de Klein-Gordon (8).

→ Lo anterior nos permite obtener cantidades conservadas asociadas a las simetrías de \mathcal{L} -vía el teorema de Noether-.

Sea $g \in \mathcal{P}$ un elemento del grupo de Poincaré. Denotemos con $g \cdot x$ la acción de g sobre un punto del espacio-tiempo con coordenadas x .

Para $g = (\Lambda, a)$ tenemos entonces $g \cdot x = \Lambda x + a$.

La acción de g sobre el espacio de Minkowski induce una acción sobre el espacio de soluciones de la ec. de K-G: $\varphi \mapsto g \cdot \varphi$, donde

$$(g \cdot \varphi)(x) = \varphi(g^{-1} \cdot x) \quad (12)$$

La forma de (12) está determinada por la condición de que si φ es solución de la ec. de K-G, entonces $g \cdot \varphi$ también debe serlo.

Para g "cerca" a la identidad, definimos el cambio infinitesimal en φ como

$$\delta \varphi := g \cdot \varphi - \varphi.$$

Explícitamente, para el caso de traslaciones, tenemos:

$g = (\mathbb{1}_4, a)$ (a un 4-vector), luego $g \cdot x = x + a$

$$\delta \varphi(x) = (g \cdot \varphi - \varphi)(x) = \varphi(x+a) - \varphi(x) \approx -a^\mu \partial_\mu \varphi(x).$$

↑
asumiendo
que $\sum_\mu |a_\mu| \ll 1$

Supongamos ahora que la acción $I[\varphi]$ permanece invariante bajo transformaciones continuas $\varphi \mapsto g \cdot \varphi$.

Esto se puede garantizar si la variación en \mathcal{L} es a lo sumo en una divergencia:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu \quad (13)$$

Si este es el caso, se puede mostrar que, definiendo la siguiente "corriente de Noether",

$$j^\mu := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi - J^\mu, \quad (14)$$

se obtiene la siguiente ley de conservación:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (15)$$

Llamamos a la relación (15) una ley de conservación, ya que a partir de esta es posible mostrar que

$$Q := \int j^0(t, \vec{x}) d^3\vec{x} \quad (16)$$

es una cantidad conservada. En el caso de traslaciones espacio-temporales, es decir $g = (\mathbb{1}_4, a)$, obtenemos 4 cantidades conservadas, correspondientes a las 4 escogencias independientes $a = \varepsilon(1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon(0, 1, 0, 0)$, etc.

La corriente de Noether correspondiente a traslaciones en la dirección "v" está dada por $j_\mu \equiv T_{\mu\nu}$, donde $T_{\mu\nu}$ es la componente μ - ν del tensor de energía-momento.

$$T_{\mu\nu} := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\varphi)} \partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (17)$$

La ley de conservación toma en este caso la forma $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

Esta condición implica, de acuerdo a (11) que las siguientes 4 cantidades ("cargas de Noether") son cantidades conservadas:

$$Q_\nu = \int T_{0\nu} d^3\vec{x}, \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Por su interpretación física, estas llevan nombres especiales:

- $\mathcal{H} = T_{00} \rightarrow$ Densidad de energía

$$\hookrightarrow H := \int T_{00}(t, \vec{x}) d^3\vec{x} \rightarrow \text{Energía del campo.}$$

- $\mathcal{P}_i = T_{0i} \rightarrow$ Densidad de momento lineal en la dirección "i"
($i=1, 2, 3$)

$$\hookrightarrow \mathcal{P}_i := \int T_{0i}(t, \vec{x}) d^3\vec{x},$$

$$\vec{P} = (P_1, P_2, P_3) \rightarrow \text{Momento lineal del campo.}$$

Para el Lagrangiano de K-G (ec. (6)), obtenemos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\tau \varphi \partial^\tau \varphi - m^2 \varphi^2) \Rightarrow$$

$$\mathcal{P}^i = \dot{\varphi} \partial^i \varphi, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + (\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2)$$

Finalmente, tenemos:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (\dot{\varphi}(t, \vec{x})^2 + (\vec{\nabla} \varphi(t, \vec{x}))^2 + m^2 \varphi(t, \vec{x})^2)$$

$$P^i = \int d^3\vec{x} \dot{\varphi}(t, \vec{x}) \partial^i \varphi(t, \vec{x})$$

(18)

- Nótese que para la energía tenemos $H \geq 0$, lo cual parece indicarnos un camino hacia una nueva interpretación de la ec. de K-G.
- A pesar de que las densidades \mathcal{H} y \mathcal{P}^i dependen -en principio- de t , las cantidades integradas no. Esto es consecuencia del teorema de Noether, pero también puede ser verificado explícitamente.
- Las expresiones anteriores resultarán ser de gran importancia a la hora de obtener una interpretación, en términos de partículas, del proceso de "segunda cuantización" o "cuantización de campos" que estudiaremos más adelante.