Andrés Reyes

Grupos continuos y sus generadores infinitesimales.

La sección anterior terminó con la definición de algunos de los grupos matriciales más comunmente usados en física:

$Gl(n,\mathbb{K})$, $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$.

Estos son ejemplos de lo que se conoce como Grupo de Lie.

Los grupos de Lie juegan un papel de gran importancia en la física y, en particular, en la física de partículas. Así mismo, poseen propiedades muy interesantes y relevantes, algunas de las cuales pretendemos estudiar aquí, a través de ejemplos explícitos y sencillos.

El grupo SO(2)

$$SO(2) = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}_2 ,\ Det(A) = 1 \}$$

Para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SO(2)$, veamos qué implican las

condiciones $A^T A = \mathbb{1}_2$, $Det\, A = 1$.

- $Det\, A = 1 \Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1 \qquad (1)$
- $A^T A = \mathbb{1}_2 \Rightarrow \quad a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \qquad (2)$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \qquad (3)$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \qquad (4)$$

Ecs. (2) - (4) nos dicen que las dos columnas de A deben ser vectores unitarios y ortogonales. Entonces, si escogemos

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

, que es completamente general, para el otro vector tenemos exactamente 2 opciones:

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

La condición (1) $(\mathrm{Det} A = +1)$ lleva a que debemos escoger el signo de arriba.

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \rightarrow \text{forma general de las matrices de } SO(2)$$

Como bien sabemos, esta matriz corresponde a una rotación en el plano en un ángulo θ, en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Ahora notemos lo siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escribiendo $\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boxed{J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$, tenemos

$$A = \cos\theta \, \mathbb{1}_2 + \sin\theta \, J.$$

Ahora, notando que $J^2 = -\mathbb{1}_2$, vale la pena comparar con la fórmula de Euler:

$$\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$$

Pues esto es más que una coincidencia, ya que tenemos:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \cos\theta\, \mathbb{1}_2 + \sin\theta\, J = e^{\theta J}} \qquad (5)$$

Podemos entonces afirmar que $SO(2) = \{ e^{\theta J} \mid \theta \in [0, 2\pi) \}$.

- El hecho de que todo elemento g de $SO(2)$ pueda ser escrito como la exponencial de una cierta matriz (J), $g = e^{\theta J}$, es en realidad una propiedad general de los grupos de Lie.
- A la matriz J se le da el nombre de

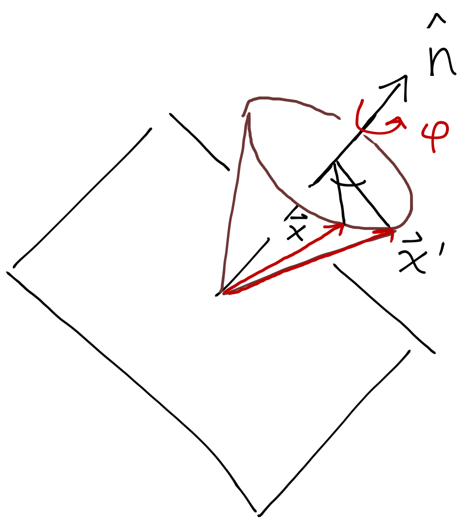
  "generador infinitesimal"

  del grupo $SO(2)$.

El grupo $SO(3)$

Estudiaremos ahora los generadores infinitesimales del grupo $SO(3)$.

Para esto, usaremos el hecho de que toda rotación en $\mathbb{R}^3$ puede expresarse a través de una rotación en un ángulo φ sobre el plano perpendicular a algún vector unitario $\hat{n}$:



Si $\vec{x}' = R\vec{x}$, $R \in SO(3)$, entonces $\vec{x}'$ se puede escribir como

$$\vec{x}' = (1-\cos\varphi)(\hat{n}\cdot\vec{x})\,\hat{n} + \cos\varphi\, \vec{x} - \hat{n}\times\vec{x}\, \sin\varphi \qquad (6)$$

para φ, $\hat{n}$ adecuados.

"$-\hat{n}\times\vec{x}\sin\varphi$"

- <u>Nota</u>: el uso del signo "$-$" en (6) depende de si estamos adoptando un punto de vista pasivo ó activo para la transformación.

Es conveniente reescribir (6) de la siguiente forma:

$$\vec{x}' = \vec{x} + (1-\cos\varphi)\underbrace{\left((\hat{n}\cdot\vec{x})\hat{n} - \vec{x}\right)}_{(a)} - \sin\varphi\,\underbrace{(\hat{n}\times\vec{x})}_{(b)}$$

Ahora escribamos (a) y (b) en forma matricial ($\hat{n}=(n_1,n_2,n_3)$, $\|\hat{n}\|=1$):

<u>(a)</u>: $(\hat{n}\cdot\vec{x})\hat{n} - \vec{x} = (n_1x^1+n_2x^2+n_3x^3)\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} =$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} n_1^2-1 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_1n_2 & n_2^2-1 & n_2n_3 \\ n_1n_3 & n_2n_3 & n_3^2-1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbb{M}}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \mathbb{M}\vec{x} \qquad (7)$$

(b) $$\hat{n}\times\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathbb{N}}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \mathbb{N}\vec{x} \qquad (8)$$

$$\vec{x}' = \left(\mathbb{1}_3 + (1-\cos\varphi)\mathbb{M} - \sin\varphi\,\mathbb{N}\right)\vec{x} \qquad (9)$$

- <u>Ejercicio</u> Mostrar que las matrices $\mathbb{M}$ y $\mathbb{N}$ satisfacen:

$\mathbb{N}^2 = \mathbb{M}$, $\mathbb{N}^3 = -\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^4 = -\mathbb{M}$, $\mathbb{N}^5 = \mathbb{N}$, ...

Es fácil usar las anteriores relaciones para mostrar que (9) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\vec{x}\,' = e^{-\varphi \mathbb{N}}\,\vec{x} \qquad \text{(nótese la similitud con (5) ...)}$$

- $$\mathbb{N} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} = n_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:J_1} + n_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:J_2} + n_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:J_3}$$

Introduciendo las matrices J_1, J_2, J_3 como en la expresión anterior, podemos escribir: $\mathbb{N} = \hat{n}\cdot\vec{J} := n_1 J_1 + n_2 J_2 + n_3 J_3$.

Así, podemos concluir:

Toda matriz de rotación $R \in SO(3)$ puede ser escrita en la forma $R = e^{-\varphi \hat{n}\cdot\vec{J}}$, donde $\varphi \in \mathbb{R}$ y $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$, $\|\hat{n}\| = 1$.

- A dichas matrices J_1, J_2 y J_3 las denominamos generadores infinitesimales del grupo $SO(3)$.

El nombre está justificado por el siguiente hecho (ejercicio):

$$\lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{1}_3 - \frac{\varphi}{N}\,\hat{n}\cdot\vec{J} \right)^N = e^{-\varphi \hat{n}\cdot\vec{J}}.$$

- De gran importancia son las relaciones de conmutación que satisfacen dichas matrices (ejercicio):

$$\boxed{[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k} \qquad (10)$$

Nuestro siguiente objetivo es obtener los generadores infinitesimales del grupo de Lorentz y sus relaciones de conmutación, de forma análoga a como lo hicimos en el caso del grupo SO(3) (cf. ec. (10))

Algunas propiedades del grupo de Lorentz.

Hemos definido una transformación de Lorentz como una transf. de coordenadas $x^\mu \longmapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, sujeta a la condición

$$\boxed{\Lambda^T g \Lambda = g} \qquad (11)$$

Observaciones:

- La notación que seguiremos para los índices es tal que la matriz Λ tiene componentes $\Lambda^\mu{}_\nu$, donde μ representa la fila y ν la columna:

fila

$$\Lambda^\mu{}_\nu \qquad (12)$$

columna

- Si en las transformaciones de coordenadas admitimos un término inhomogéneo (a^μ), de tal forma que ahora tengamos

$$x^\mu \longmapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

obtenemos el grupo de Poincaré.

Como hemos visto previamente, los elementos de dicho grupo son de la forma (Λ, a), donde $\Lambda \in M_4(\mathbb{R})$ satisface (11) y a es un 4-vector, $a \in \mathbb{R}^4$.
La regla de multiplicación en este grupo la hemos discutido previamente y está dada por:

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

—— // ——

Veamos ahora algunas consecuencias de la condición (11).
Usando (12) es fácil ver que se debe cumplir:

$$\Lambda^\mu{}_\sigma \, g_{\mu\nu} \, \Lambda^\nu{}_\tau = g_{\sigma\tau} \qquad (13)$$

Casos particulares:

- $\underline{\sigma = \tau = 0}$ $(g_{00} = 1)$ $\longrightarrow$ $$1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \qquad (14a)$$
- $\underline{\sigma = i, \tau = k}$ $(g_{ik} = -\delta_{ik})$ $\longrightarrow$ $$-\delta_{ik} = \Lambda^0{}_i \Lambda^0{}_k - \sum_{j=1}^{3} \Lambda^j{}_i \Lambda^j{}_k \qquad (14b)$$
- $\underline{\sigma = 0, \tau = i}$ $(g_{i0} = 0)$ $\longrightarrow$ $$0 = \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_i - \sum_{j=1}^{3} \Lambda^j{}_0 \Lambda^j{}_i \qquad (14c)$$

Como consecuencia directa de (14 a,b,c), tenemos:

- $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$

En efecto, por (14 a), $(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1$.

Por otro lado, $\Lambda^T g \Lambda = g$ implica $\operatorname{Det} \Lambda = \pm 1$.

Con esto obtenemos una clasificación de las transformaciones de Lorentz, dependiendo de si $\operatorname{Det} \Lambda = \pm 1$ ("$L_\pm$") y de si $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ ($L^\uparrow$) ó si $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ ($L^\downarrow$).

$\searrow$ 4 clases de transformaciones: $\underset{\mathbb{1}}{\underset{\Psi}{L^\uparrow_+}}$, $\underset{PT}{\underset{\Psi}{L^\downarrow_+}}$, $\underset{P}{\underset{\Psi}{L^\uparrow_-}}$, $\underset{T}{\underset{\Psi}{L^\downarrow_-}}$

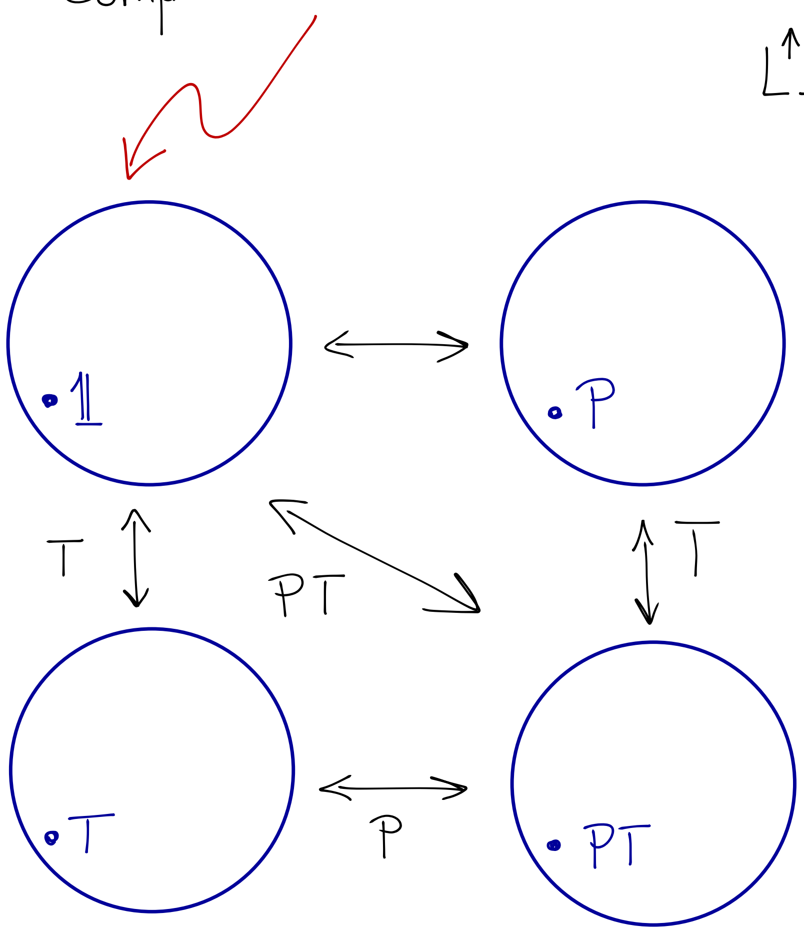
$P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & -\mathbb{1}_3 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$: Transf. de paridad (reflexión espacial)

$T = \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathbb{1}_3 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$: Transf. de inversión temporal.

Componente conexa de la identidad ($L^\uparrow_+$).

$L^\uparrow_+ := \{ \Lambda \in M_4(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1,\ \operatorname{Det} \Lambda = 1 \}$

$\equiv$ Transformaciones propias, ortocronas de Lorentz.



Teorema: Sea $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$. Entonces existen $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ y $R \in SO(3)$, tales que $\Lambda = L(\vec{v})\,\mathcal{R}$, donde

$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ representa una rotación y

$$L(\vec{v}) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma\langle\vec{v}| \\ \hline \gamma|\vec{v}\rangle & \mathbb{1}_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}|\vec{v}\rangle\langle\vec{v}| \end{array}\right)$$ es un "boost".

Demostración: (cf. Scheck, "Mechanics", cap. 4)

Si asumimos que el resultado es cierto, debemos tener:

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \hline \Lambda^1{}_0 & & & \\ \Lambda^2{}_0 & & \text{"}\Lambda^i{}_j\text{"} & \\ \Lambda^3{}_0 & & & \end{array}\right) \overset{!}{=} L(\vec{v})\,\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma\langle\vec{v}| \\ \hline \gamma|\vec{v}\rangle & \mathbb{1}_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}|\vec{v}\rangle\langle\vec{v}| \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & \underbrace{|\vec{\alpha}_1\rangle\,|\vec{\alpha}_2\rangle\,|\vec{\alpha}_3\rangle} & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$\leftarrow R = \left(|\vec{\alpha}_1\rangle\,|\vec{\alpha}_2\rangle\,|\vec{\alpha}_3\rangle\right)$
$\uparrow$
$SO(3)$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} \gamma & * & * & * \\ \hline \gamma|\vec{v}\rangle & & * & \end{array}\right) \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \gamma = \Lambda^0{}_0 \\ \gamma v^i = \Lambda^i{}_0 \end{array}}$$

$\rightarrow$ Esto se debe cumplir, si la conclusión del teorema es verdadera!

Por comparación también obtenemos $\gamma\langle\vec{v}|\alpha_i\rangle = \Lambda^0{}_i$ y, teniendo en cuenta que $\gamma = \Lambda^0{}_0$,

$$\left(\mathbb{1}_3 + \frac{(\Lambda^0{}_0)^2}{1+\Lambda^0{}_0}|\vec{v}\rangle\langle\vec{v}|\right)|\vec{\alpha}_j\rangle = \begin{pmatrix} \Lambda^1{}_j \\ \Lambda^2{}_j \\ \Lambda^3{}_j \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$|\vec{\alpha}_j\rangle + \frac{\Lambda^0{}_0|\vec{v}\rangle\,\Lambda^0{}_j}{1+\Lambda^0{}_0} = \begin{pmatrix} \Lambda^1{}_j \\ \Lambda^2{}_j \\ \Lambda^3{}_j \end{pmatrix} \Longrightarrow R_{ij} = \Lambda^i{}_j - \frac{\Lambda^i{}_0\,\Lambda^0{}_j}{1+\Lambda^0{}_0}$$

En efecto, los coeficientes R_{ij} así definidos dan lugar a una matriz ortogonal:

$$(R^T R)_{ik} = \sum_{j=1}^{3} R_{ji} R_{jk} = \sum_{j=1}^{3} \left(\Lambda^j{}_i - \frac{\Lambda^j{}_0 \Lambda^0{}_i}{1+\Lambda^0{}_0} \right) \left(\Lambda^j{}_k - \frac{\Lambda^j{}_0 \Lambda^0{}_k}{1+\Lambda^0{}_0} \right)$$

$$= \delta_{ik}$$

Aquí: usar (14 a,b,c) !

Así mismo, definiendo $\gamma = \Lambda^0{}_0$ y $v^i = \dfrac{\Lambda^i{}_0}{\Lambda^0{}_0}$,

verificamos que $\gamma \geq 1$ y, usando (14a),

$$1 = \gamma^2 - \gamma^2 \vec{v}^{\,2} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Claramente vemos que, para $\vec{v}$ y R definidos como

- $v^i := \dfrac{\Lambda^i{}_0}{\Lambda^0{}_0}$
- $R_{ij} := \Lambda^i{}_j - \dfrac{\Lambda^i{}_0 \Lambda^0{}_j}{1+\Lambda^0{}_0}$,

se cumple $\Lambda = L(\vec{v}) \mathcal{R}$

Generadores infinitesimales del grupo de Lorentz

Por el teorema de descomposición, todo $\Lambda \in L_+^\uparrow$ puede escribirse como $\Lambda = L(\vec{v})\,R$. Como los generadores de rotaciones ya nos son familiares, nos vamos a concentrar en cómo obtener los generadores para los "boosts".

Forma general de un boost $\rightarrow$ $L(\vec{v}) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma\langle\vec{v}| \\ \hline \gamma|\vec{v}\rangle & \mathbb{1}_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}|\vec{v}\rangle\langle\vec{v}| \end{array}\right)$.

En una dimensión espacial, el término de la esquina inferior derecha toma una forma más simple:

$$1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta^2 = \gamma.$$

Así que podemos escribir: $L(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$.

Ahora notemos que la parametrización

$$\left.\begin{aligned} \cosh\lambda &= \gamma \\ \sinh\lambda &= \gamma\beta \end{aligned}\right\} \rightarrow \tanh\lambda = \beta \qquad \text{tiene sentido,}$$

ya que $\gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1$, $|\beta| \leq 1$ y $\gamma \geq 1$.

Podemos escribir, por lo tanto,

$$L(\beta) \equiv L(\lambda) = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & \sinh\lambda \\ \sinh\lambda & \cosh\lambda \end{pmatrix}.$$

Ahora definamos $K := \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} L(\lambda) = \left.\begin{pmatrix} \sinh\lambda & \cosh\lambda \\ \cosh\lambda & \sinh\lambda \end{pmatrix}\right|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Nótese que $K^2 = \mathbb{1}_2$, luego $K^{2n} = \mathbb{1}_2$.

$$\searrow \quad e^{\lambda K} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda K)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \mathbb{1}_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} K$$

$$= \cosh\lambda \cdot \mathbb{1}_2 + \sinh\lambda \cdot K,$$

es decir, tenemos $L(\lambda) = e^{\lambda K}$.

Decimos entonces que K es un "generador infinitesimal".

• Ahora consideremos el caso general.

Recordando que $1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta^2 = \gamma$, podemos escribir, con

$|\vec{\beta}\rangle = \beta|\hat{n}\rangle$. vector unitario.

$$L(\vec{v}) = L(\vec{\beta}) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma\langle\vec{\beta}| \\ \hline \gamma|\vec{\beta}\rangle & \mathbb{1}_3 + \frac{\gamma^2\beta^2}{1+\gamma}|\hat{n}\rangle\langle\hat{n}| \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma\beta\langle\hat{n}| \\ \hline \gamma\beta|\hat{n}\rangle & \mathbb{1}_3 + (\gamma-1)|\hat{n}\rangle\langle\hat{n}| \end{array}\right)$$

En este caso, vamos a obtener 3 generadores, que se pueden hacer corresponder a las 3 escogencias $\hat{n} = (1,0,0)$
$(0,1,0)$
$(0,0,1)$

Por analogía con el cálculo anterior,

vemos que para $\hat{n} = (1,0,0)$:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Generador:} \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15a)$$

De la misma forma, escogiendo $\hat{n}=(0,1,0)$ y $\hat{n}=(0,0,1)$ obtenemos:

$$K_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad K_3 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \qquad (15b)$$

- Ahora, si para $\vec{\beta}$ definimos $\hat{n} = \dfrac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|}$ y $\lambda = \tanh^{-1}\|\beta\|$, obtenemos una parametrización

$$L(\vec{\beta}) \equiv L(\lambda,\hat{n}) = \left(\begin{array}{c|c} \cosh\lambda & \sinh\lambda \langle\hat{n}| \\ \hline \sinh\lambda|\hat{n}\rangle & \mathbb{1}_3 + \underbrace{\left(\dfrac{(\gamma\beta)^2}{1+\gamma}\right)}_{=\cosh\lambda - 1}|\hat{n}\rangle\langle\hat{n}| \end{array}\right),$$

de donde se sigue $\left.\dfrac{dL}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \vec{K}\cdot\hat{n}$.

$\Rightarrow$ Toda transformación pura ("boost") de Lorentz se puede escribir en la forma

$$\boxed{L(\vec{\beta}) = e^{\lambda \vec{K}\cdot\hat{\beta}}}, \qquad (16)$$

donde $\tanh\lambda = \|\vec{\beta}\|$, $\hat{\beta} = \dfrac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|}$.

• Para una transformación de Lorentz que esté dada por una rotación pura, tenemos

$\Lambda = \mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right)$, donde $R \in SO(3)$. Por lo tanto

(clase #3) $\exists\, \varphi, \hat{n}$ tales que $R = e^{-\varphi \vec{J}\cdot\hat{n}}$, con J_1, J_2, J_3 generadores infinitesimales que satisfacen relaciones de conmutación dadas por (10).

Como resultado final tenemos entonces $\longrightarrow$

> Toda transformación $\Lambda \in L_+^\uparrow$ puede ser escrita en la forma:
>
> $$\Lambda = e^{-\varphi \vec{J}\cdot\hat{n}}\, e^{\lambda \vec{K}\cdot\hat{\beta}} \qquad (17)$$

• Ejercicio: Verificar que los 6 generadores infinitesimales $J_1, J_2, J_3, K_1, K_2, K_3$ satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k \;,\quad [J_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k \;,$$
$$[K_i, K_j] = -\varepsilon_{ijk} J_k \qquad (18)$$