# Invarianza Relativista.

Andrés Reyes

## Los postulados de la Relatividad Especial

Breve repaso del Principio de Relatividad Especial

Referencia: Scheck, F., "Mechanics",
capítulo 4 (Relativistic Mechanics)

Recordemos lo que afirma el Principio de Relatividad de Galileo:

→ No se puede distinguir un estado de reposo respecto a uno de movimiento con velocidad constante, a través de experimentos mecánicos.

↳ Leyes de Newton: invariantes bajo transformaciones de Galileo.

$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow$
- Rotaciones
- Traslaciones
- Transf. con $v = cte$.

### Problemas

- Ecs. Maxwell → No son invariantes bajo transf. de Galileo.
  → Traen consigo información sobre la vel. de la luz ($c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$), pero no hacen referencia a un marco particular (históricamente: "éter", Michelson-Morley, etc.)

- Partículas sin masa, pero con energía y momento

↳ $E = p^2/2m$ no tiene sentido para dichas partículas!

Fotón: $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ , $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

→ $\boxed{E = pc}$ ← Efecto fotoeléctrico, efecto Compton.

→ En general:

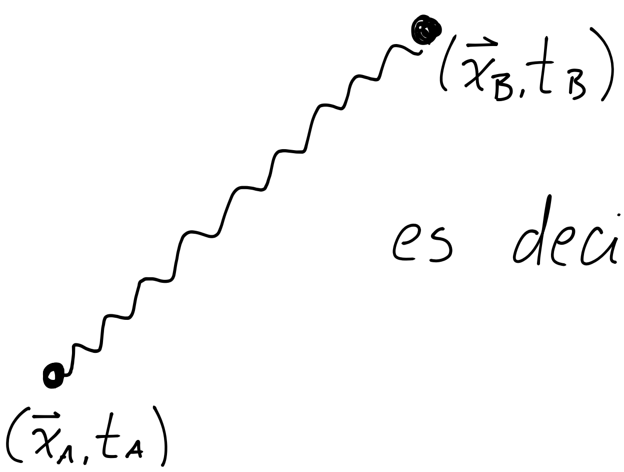
$$\boxed{E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2}$$

(es lo que dicen los experimentos...)

## Postulado I (Einstein)

La velocidad de propagación de la luz en todo marco inercial y en el vacío es siempre constante:
$c = 299{,}792{,}458$ m/s.

Tenemos entonces que, para todos los marcos inerciales:




$(\vec{x}_B, t_B) \longrightarrow |\vec{x}_B - \vec{x}_A|^2 = c^2 |t_B - t_A|^2$,

es decir, $c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$.

Las transformaciones de coordenadas entre marcos inerciales deben ser tales que dicha relación se respete:

$(t,\vec{x}) \xrightarrow{\Lambda} (t',\vec{x}')$, $\Lambda$: transf. de coordenadas.

$\Lambda$ admisible si $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$ <u>implica</u> $c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 0$.

Notación: $x^0 = ct$, $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$; $x \equiv x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

La condición anterior se puede reformular de la siguiente manera:

Hacer $z = x - y$ (comparación de eventos).

Con $g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la condición toma la forma:

"$(z, gz) = 0 \Rightarrow (\Lambda z, g\Lambda z) = 0$"

¿Consecuencias para $\Lambda$? Veamos un caso simple (una sola dimensión espacial) $\longrightarrow$

Aquí, $g = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $z = (z^0, z^1)$; $\Lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longrightarrow$

¿Condiciones sobre $A, B, C, D$?

Si $(z, gz) = 0$, se tiene:

$(z^0)^2 = (z^1)^2$, luego $z^0 = \pm z^1$.

Queremos $(\Lambda z, g\Lambda z)=0$, es decir, para $z'=\Lambda z=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^0 \\ z^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Az^0+Bz^1 \\ Cz^0+Dz^1\end{pmatrix}$,

$$\left.\begin{cases} z^{0\prime}=Az^0+Bz^1 \\ z^{1\prime}=Cz^0+Dz^1\end{cases}\right\}^{*} \text{ requerimos: } (z^{0\prime})^2-(z^{1\prime})^2=0$$

De $(z,gz)=0$ tenemos $z^0=\pm z^1$ (ambos signos válidos)

Reemplazando $*$ en $(z^{0\prime})^2-(z^{1\prime})^2=0$, obtenemos:

$$(Az^0+Bz^1)^2-(Cz^0+Dz^1)^2 \overset{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\text{usando } (z^1)^2=(z^0)^2)$$

$$(z^0)^2\underbrace{(A^2+B^2-C^2-D^2)}_{=:\alpha} + 2z^0z^1\underbrace{(AB-CD)}_{=:\beta} \overset{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$(z^0)^2\alpha + 2z^0z^1\beta \overset{!}{=} 0 .$$

Usando $z^0=\pm z^1$, obtenemos: $\alpha \pm 2\beta = 0$, de donde se sigue $\alpha=\beta=0$.

Esto implica entonces $\rightarrow$

$$\left.\begin{cases} A^2-C^2=D^2-B^2=:\lambda \\ AB-CD=0\end{cases}\right\} (**)$$

Por otro lado tenemos:

$$\Lambda^T g\Lambda = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & C \\ B & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{array}{c:c} A^2-C^2 & AB-CD \\ \hdashline AB-CD & B^2-D^2\end{array}\right) \overset{(**)}{=} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda\end{pmatrix} = \lambda g$$

Vemos entonces que, en general, la condición que obtendremos será de la forma

$$\Lambda^T g \Lambda = \lambda g \,, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Sin embargo, como se argumenta en Scheck (Mechanics, cap.4), sólo tiene sentido físico considerar el caso $\lambda = 1$.

La condición sobre una transformación $\Lambda$ para que sea admisible es, por lo tanto, que satisfaga $\Lambda^T g \Lambda = g$.

Adicionalmente podemos considerar términos inhomogéneos, ya que siempre tomamos diferencias al calcular intervalos espacio-temporales.

**Postulado II** Las transformaciones $x \mapsto x' = \Lambda x + a$ deben dejar invariante* la expresión $z^2 = (z^0)^2 - \|\vec{z}\|^2$, donde $z = x - y$; $z = (z^0, \vec{z})$.

*: Nótese que dicha invarianza es equiv. a la condición $\Lambda^T g \Lambda = g$.

Tenemos finalmente la forma más "abstracta" del postulado:

> **Postulado de la Relatividad Especial:**
>
> "Las Leyes de la Naturaleza son invariantes bajo transformaciones $(\Lambda, a)$ tales que $\Lambda^T g \Lambda = g$".

**Observaciones:**

- Se debe dar por entendido que el dominio de validez de este postulado es restringido. En particular, el postulado no tiene en cuenta la gravitación.

- Adicionalmente, se debe tener en cuenta que las transformaciones $\Lambda$ incluyen ciertas transformaciones (e.g. paridad) que <u>no</u> son simetrías de la Naturaleza. Más adelante trataremos este punto con más detalle.

— // —

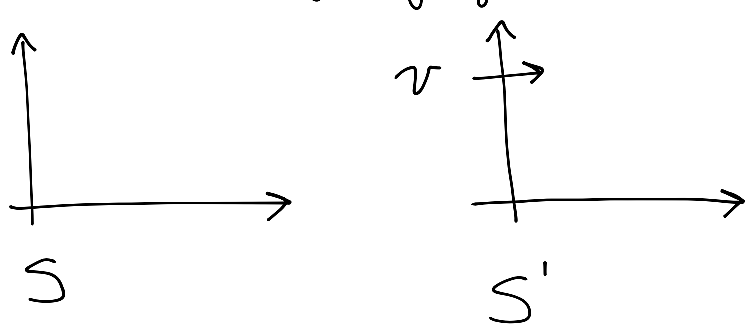
**Definición** (Transformación de Lorentz)

Una transformación de coordenadas $x \mapsto x' = \Lambda x$, descrita -en una base dada- por una matriz $\Lambda \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$, se denomina transformación de Lorentz, si satisface la siguiente identidad fundamental:

$$\boxed{\Lambda^T g \Lambda = g}$$

**Ejemplo:**

Consideremos un "boost" a lo largo del eje $x$ (para lo cual ignoramos los ejes "$y$" y "$z$"):




$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma(t - xv/c^2),$$

donde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$.

Esta transformación toma una forma más "simétrica" si definimos $\beta := v/c$ y hacemos $x^0 = ct$ y $x^1 = x$.

La transf. toma la forma

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0) \qquad x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1) \longrightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}.$$

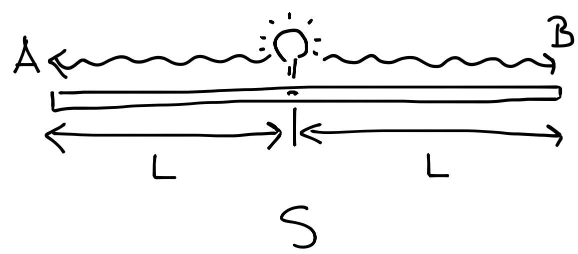
En general, un <u>boost</u> en la dirección $\vec{v}$ está dado por $\Lambda = L(\vec{v})$, donde $L(\vec{v})$ se define así:

$$L(-\vec{v}) := \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma\langle\vec{v}| \\ \hline \gamma|\vec{v}\rangle & \mathbb{1}_{3\times 3} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}|\vec{v}\rangle\langle\vec{v}| \end{array}\right).$$

Consideremos ahora algunos ejemplos sencillos que ilustran la estructura causal impuesta por el conjunto de transformaciones que satisfacen el postulado de la Relatividad Especial.

- <u>Simultaneidad</u>

Situación: varilla de longitud $2L$ con fuente de luz en la mitad.




Consideremos, para la luz emitida por la fuente, los siguientes eventos:

<u>Evento 1</u>: Luz llega al punto "A"

<u>Evento 2</u>: Luz llega al punto "B".

- En el marco $S$, los eventos 1 y 2 son simultáneos:

$$x_1 = -L \,, \qquad t_1 = L/c$$

$$x_2 = L \,, \qquad t_2 = L/c$$

• En un marco S' que se desplaza hacia la derecha con rapidez $v$, tenemos ( S y S' coinciden en $t=0$).

$$t_1' = \gamma (t_1 - x_1 v/c^2)$$

$$t_2' = \gamma (t_2 - x_2 v/c^2)$$

$$\searrow t_1' = \gamma\left(\frac{L}{c} - (-L)\frac{v}{c^2}\right) = \frac{L}{c}\gamma\left(1+\frac{v}{c}\right) = \frac{L}{c}\gamma(1+\beta)$$

$$t_2' = \gamma\left(\frac{L}{c} - L\frac{v}{c^2}\right) = \frac{L}{c}\gamma(1-\beta)$$

$$1 \geq \beta > 0 \implies t_2' < t_1'$$

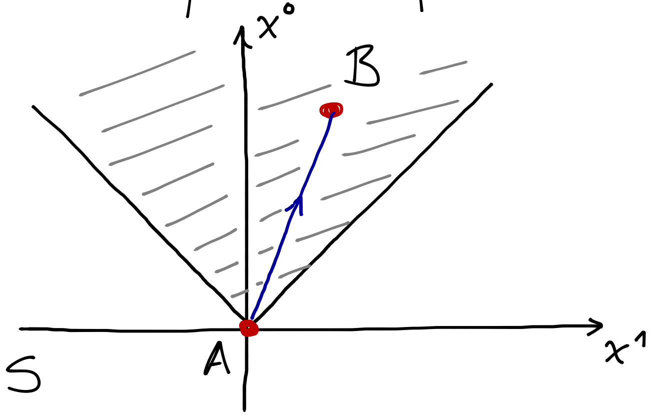
↘ Según S', la luz llega primero al punto B.

Tenemos entonces un ejemplo de dos eventos que son simultáneos en un marco de referencia pero que no lo son en otro.

## • Relación entre eventos

De acuerdo a si hay o no conexión causal entre ellos.

Consideremos dos eventos A y B que en un marco de referencia S se pueden representar de la siguiente forma:




En S, A sucede antes que B.

→ Una señal (a $\vec{v}$ = cte) que conecte los 2 eventos, viaja con $|\vec{v}| < c$

En este caso tenemos, en S:

A: $(t_A, \vec{x}_A)$

B: $(t_B, \vec{x}_B)$ , con $t_B > t_A$ (según la gráfica, $t_A = 0$, $x_A = 0$)

Pregunta: ¿Podemos encontrar un marco de referencia para el
(ejercicio) cual el orden temporal de A y B se encuentre invertido?

Solución: Sean $L = x_B - x_A$ y $T = t_B - t_A > 0$. Según hipótesis, $\frac{L}{T} < c$.

Tenemos
$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma(t - xv/c^2) \end{aligned}\right\} \rightarrow \underline{\text{En } S'}:$$

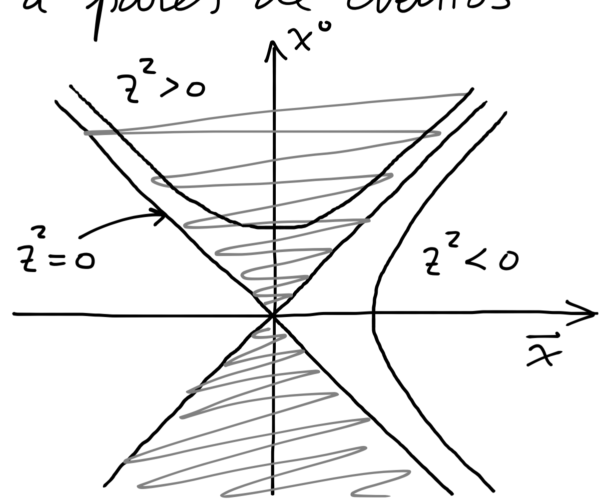
$$L' = \gamma(L - vT)$$
$$T' = \gamma(T - Lv/c^2)$$

Buscamos $v$ tal que $T' < 0$. Requerimos, por lo tanto, $T - Lv/c^2 < 0$, es decir, $T < Lv/c^2$, que equivale a $\frac{c^2}{v} < \frac{L}{T} < c$ ← por hipótesis $\Longleftrightarrow$ $v > c$ → no se puede!

→ Para eventos tales que $\frac{L}{T} < c$, i.e. tales que $(x_B - x_A)^2 < c^2(t_B - t_A)^2$, el orden temporal de los eventos <u>no</u> depende del sistema de referencia:

$$x = (x^0, \vec{x}) \longrightarrow x^2 = (x^0)^2 - \vec{x}^{\,2} > 0 \quad : \text{"Time-like"}$$

↪ Clasificación de eventos en el espacio de Minkowski de acuerdo a si corresponden o no a pares de eventos conectados causalmente ⟶




$z = x_B - x_A$, $z^2 = (z^0)^2 - (\vec{z})^2$

- $z^2 > 0$: "time-like" (hay conexión causal)
- $z^2 < 0$: "space-like" (no la hay)
- $z^2 = 0$: "light-like" → cono de luz

Hemos visto cómo, al imponer la condición de que para dos eventos A y B cualesquiera representados por 4-vectores $x_A$ y $x_B$ los únicos cambios de coordenadas admisibles sean aquellos que dejen invariante el intervalo relativista

$$(z,z) \equiv z_\mu z^\mu = (z^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (z^i)^2,$$

donde $z = x_A - x_B$, obtenemos un conjunto de transformaciones admisibles $(\Lambda, a): x \longmapsto x' = \Lambda x + a$, donde las matrices $\Lambda \in M_4(\mathbb{R})$ deben cumplir la relación

$$\Lambda^T g \Lambda = g,$$

para $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Estudiando el efecto combinado de dos transformacion de este tipo, es fácil ver (ejercicio) que se debe cumplir la siguiente "regla" de composición:

$$(\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a') \qquad (1)$$

Esto nos muestra que el conjunto de transformaciones

$$\mathcal{P} = \{ (\Lambda, a) \mid \Lambda \in M_4(\mathbb{R}),\ \Lambda^T g \Lambda = g,\ a \in \mathbb{R}^4 \}$$

forma un grupo.

Podemos así reformular el Postulado de la Relatividad Especial diciendo que

"Las Leyes de la Naturaleza deben ser invariantes bajo la acción del grupo de transformaciones $(\Lambda, a)$ (el grupo de Poincaré)"

Comentarios:

- Como veremos más adelante, es justo la aplicación de este principio en el dominio de la física cuántica lo que nos va a llevar a un entendimiento del concepto de "partícula elemental" en física de altas energías.

- Hay que tener en cuenta que el rango de validez de este principio es limitado, ya que ignora la gravitación. La generalización de este principio -en el contexto clásico- nos lleva justamente a la Relatividad General de Einstein.
En la física de partículas elementales (como la que estudiaremos en este curso) es justificado ignorar los efectos de la gravedad.

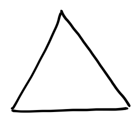
- Otro punto que estudiaremos en detalle más adelante tiene que ver con ciertas transformaciones -permitidas por la condición $\Lambda^T g \Lambda = g$- tales como transf. de paridad, que en realidad <u>no</u> son simetrías de la Naturaleza (ver más adelante → experimento de Wu). Esto nos llevará a restringir las transf. admisibles a aquellas tales que "$\Lambda \in L_+^{\uparrow}$" (ver más adelante)

En términos generales, podemos entender el concepto de simetría en términos de la acción de un conjunto de transformaciones $G$ ("grupo") sobre un conjunto $M$.

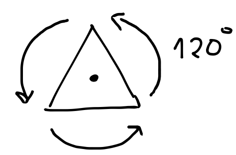
El conjunto $M$ puede ser, por ejemplo, un objeto geométrico.

En ese caso, $G$ corresponderá a un conjunto de transformaciones que preserve ciertas propiedades de $M$, en este caso, su forma.

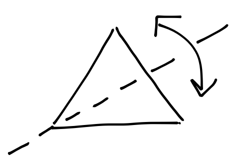
Así, si $M$ es un triángulo equilátero,

$M =$  .

es natural considerar transformaciones del siguiente tipo:

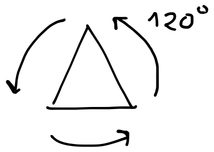
- Rotaciones de $120^\circ$, $240^\circ$ y $360^\circ \equiv 0^\circ$ $\longrightarrow$ ej: 

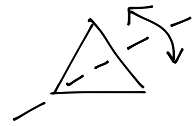
  Cualquiera de estas rotaciones dejará invariante a $M$.

- Reflexiones en torno a cada uno de los ejes de simetría.
  Por ejemplo: 

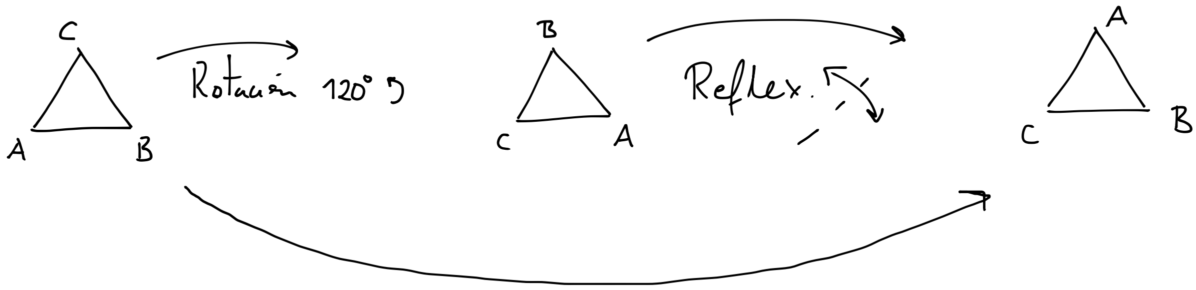
Algunas propiedades (fáciles de verificar en este caso) que posee el conjunto de transformaciones $G$ (aquí: rotaciones / reflexiones) son las siguientes:

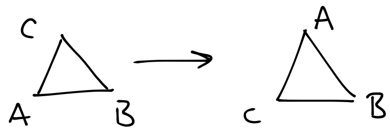
- La composición de dos operaciones de simetría es de nuevo una operación de simetría.

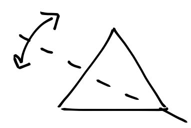
Ejemplo: Rotación: 

seguida de reflexión: 

Acción conjunta de la 2 transformaciones:




Efecto neto: 

= Reflexión 

- Existe una operación que corresponde a "no hacer nada" → en este caso, una rotación a $0^\circ \equiv 360^\circ$.
- A toda operación de simetría le corresponde una operación inversa.

— // —

En el caso que nos interesa, el grupo $G$ corresponde al conjunto de transformaciones $\mathcal{P}$ (Poincaré) con la regla de composición ec. (1), y el conjunto $M$ es el "espacio de eventos", es decir, el espacio de Minkowski.

La acción del grupo de transf. $G$ sobre el conjunto $M$ se puede expresar a través de una aplicación (acción)

$$\phi : G \times M \longrightarrow M$$
$$g\,,\ m \longmapsto \phi(g,m) \equiv \phi_g(m)$$

Más adelante especificaremos con más detalle las propiedades de dichas aplicaciones "$\phi$", pero ahora notemos que, si bien en general $G$ aparece como un conjunto de transformaciones de $M$, una vez identificamos a $G$, incluyendo su regla de "multiplicación", podemos estudiar a $G$ independientemente de $M$.

Esto nos lleva entonces a la siguiente definición:

## Definición (Grupo)

Un grupo $G$ es un conjunto con una operación ("producto")

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ g, h &\longmapsto g \cdot h \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

i) Existe un elemento $e \in G$ (elemento neutro, o identidad) tal que $g \cdot e = e \cdot g = g \quad \forall g \in G$.

ii) Para todo $g \in G$ existe un elemento inverso, denotado "$g^{-1}$", definido por la siguiente propiedad: $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

iii) $\forall\ g, h, k \in G$ se cumple (asociatividad):

$$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$$

Ejercicio: mostrar que $\mathcal{P}$, con la operación (2.1) es un grupo.

Una clase muy importante de grupos está dada por los grupos de matrices. En todos estos casos, la operación de grupo está dada por la multiplicación usual de matrices. Algunos de los ejemplos más relevantes son los siguientes:

(Notación: $M_n(\mathbb{K})$: espacio de matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$)

- $Gl(n,\mathbb{K}) = \{ A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A$ es invertible$\}$
  (Grupo General Lineal)

- $O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}_n \} \rightarrow$ Grupo ortogonal (en n-dim).

- $SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \} \rightarrow$ Grupo especial ortogonal
  (Special Orthogonal group)

- $U(n) = \{ A \in Gl(n,\mathbb{C}) \mid A^\dagger A = \mathbb{1}_n \} \rightarrow$ Grupo Unitario (dim n)

- $SU(n) = \{ A \in U(n) \mid \det A = 1 \} \rightarrow$ Grupo especial unitario.
  (Special Unitary group)