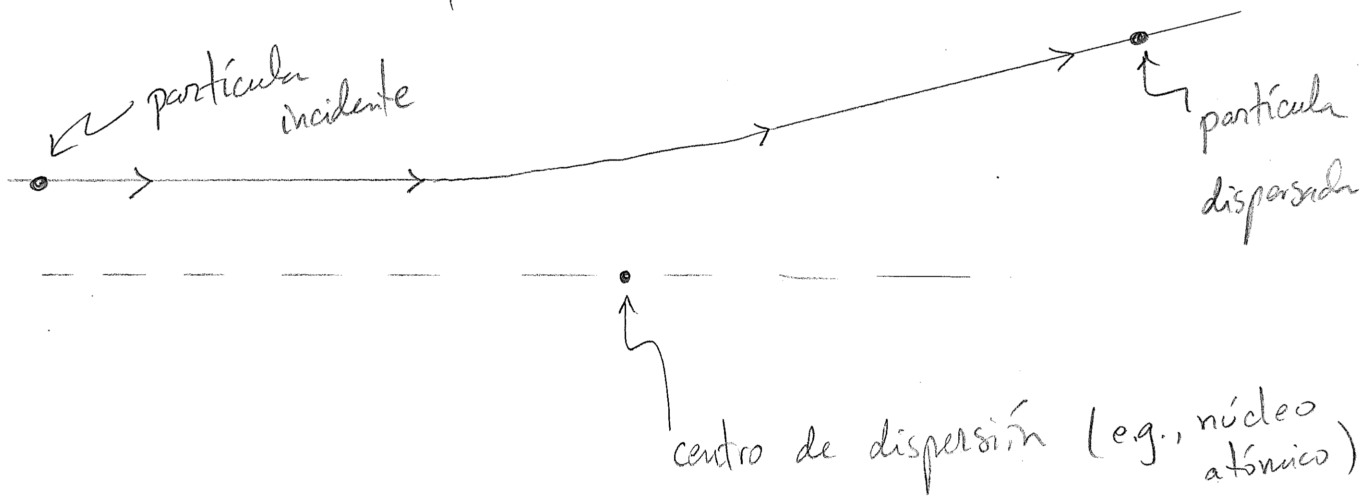
Scattering de Rutherford

- Sistemas de partículas puntuales, interactuando a través de fuerzas centrales.

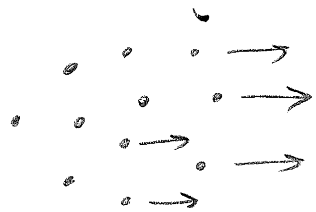
- Trayectorias clásicas → soluciones de las ecuaciones de movimiento (leyes de Newton).

Una cantidad fundamental en física de partículas es la sección eficaz de dispersión (scattering cross section), que definimos a continuación.

Supongamos que hay un flujo de partículas incidente sobre algún centro de dispersión (este puede ser, por ejemplo, un núcleo atómico). Dependiendo de la ley de fuerzas que determine la interacción entre las partículas incidentes y el centro de dispersión, las primeras seguirán ciertas trayectorias, como la que se ilustra en la figura:

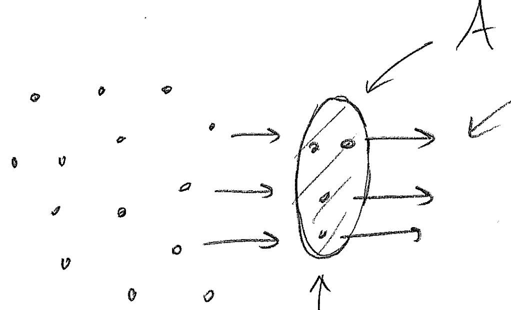


Por simplicidad, supongamos que la distribución espacial de las partículas incidentes es uniforme y que todas las partículas se mueven con la misma velocidad:



Sea n_0 = número de partículas incidentes, por unidad de área y por unidad de tiempo.

Si fijamos una sección de área transversal A, entonces el número de partículas que atraviesan dicha sección, por unidad de tiempo, estará dada por $n_0 A$.

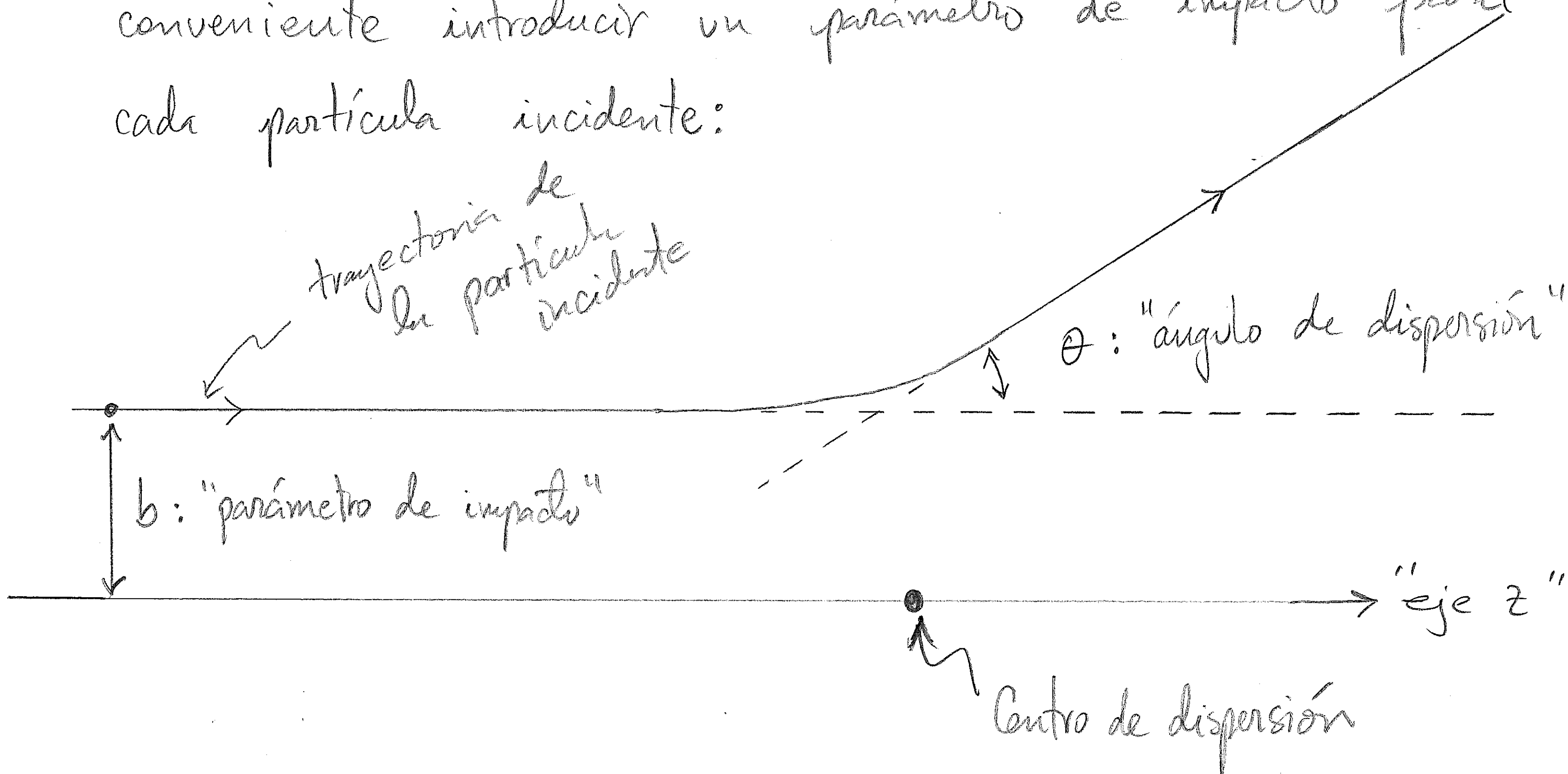


cada segundo, un número igual a $n_0 A$ de partículas atraviesa esta región.

sección (transversal, i.e, $\perp$ a la dirección de propagación de las partículas) de área A.

Por otro lado, asumiendo que la fuerza disminuye con la distancia, tendremos que las partículas dispersadas seguirán trayectorias que asintóticamente deberán ser rectas.

A cada partícula incidente le podemos asignar un "ángulo de dispersión". Así mismo, resulta conveniente introducir un "parámetro de impacto" para cada partícula incidente:



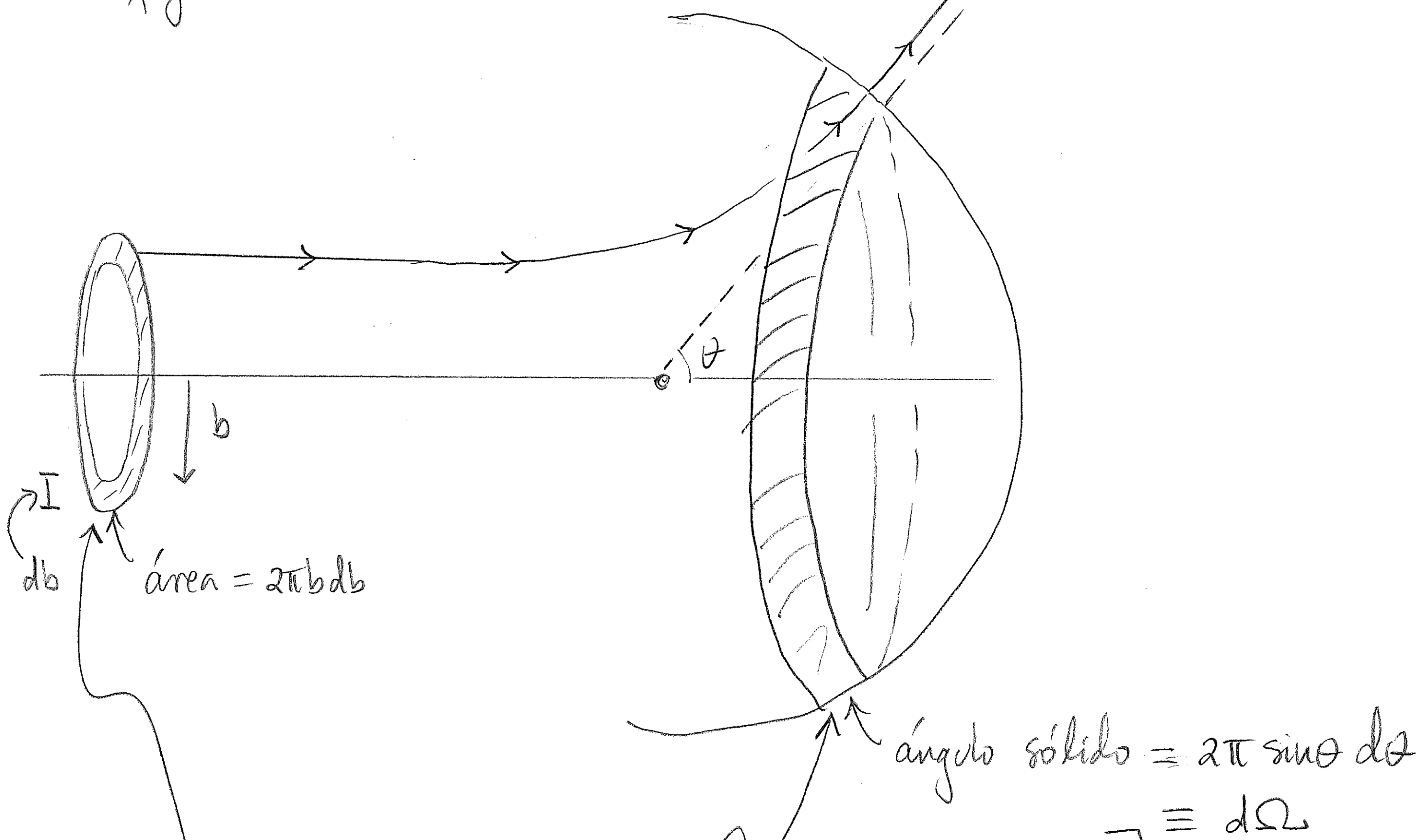
Asumiremos que es posible expresar b como función de θ
$\longrightarrow \quad b = b(\theta)$.

Si ahora consideramos un anillo de radio interior b y ancho db alrededor del "eje z" de la figura, entonces tenemos que el número de partículas que atraviesan dicho anillo, por unidad de tiempo, es

$$n_0 \cdot (\text{área del anillo}) = n_0 \cdot 2\pi b\, db$$

Como estamos considerando trayectorias clásicas, toda partícula que "ingrese" por ese anillo debe entonces "salir" por otro "anillo esférico", que está determinado por un ángulo que debe estar entre θ y $\theta + d\theta$.

La figura ilustra esta idea:



[toda partícula que entre por este anillo → debe salir por este!]

$dn \overset{def}{:=}$ número de partículas dispersadas (por u. de tiempo) en un ángulo sólido $d\Omega$

$= n_0 \, 2\pi b \, db$

<u>Definición</u> (Sección eficaz diferencial)

$$d\sigma := \frac{dn}{n_0}.$$

Según el análisis que hemos llevado a cabo, tenemos que

$$d\sigma = 2\pi b\, db.$$

Usando $b = b(\theta)$ y $d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta$, podemos reescribir $d\sigma$ así:

$$d\sigma = 2\pi b \left|\frac{db}{d\theta}\right| \cdot d\theta$$

(ejercicio: ¿por qué la derivada en valor absoluto?)

$$= (2\pi \sin\theta\, d\theta)\, \frac{b(\theta)}{\sin\theta} \left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

$$= d\Omega\, \frac{b(\theta)}{\sin\theta} \left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta} \left|\frac{db(\theta)}{d\theta}\right|}$$

El resultado anterior nos muestra que si podemos expresar el parámetro de impacto como función del ángulo de dispersión (o al contrario), entonces podemos calcular la sección eficaz.

Ejemplo (Esfera dura).

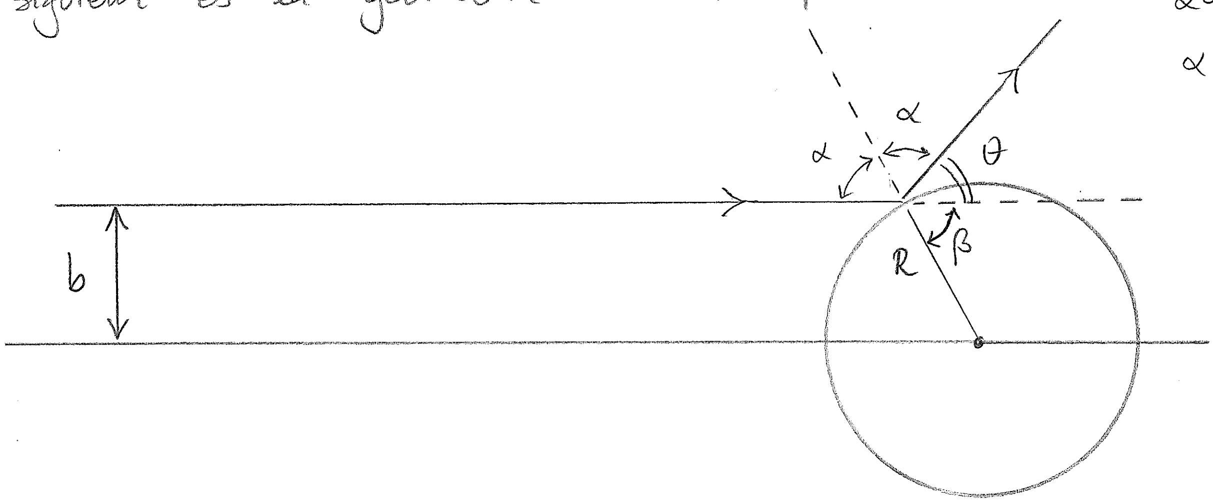
Supongamos que el centro de dispersión es una "esfera dura" de radio R. Con esto queremos decir que estamos hablando de una situación de scattering elástico, para la cual el ángulo de incidencia sobre la superficie de la esfera es igual al ángulo de dispersión. Podemos pensar que se trata de un modelo (clásico!) de un núcleo de radio R, donde el potencial es de la forma

$$U(r) = \begin{cases} V_0 , & r < R \\ 0 , & r \geq R \end{cases} ,$$

(potencial repulsivo $\rightarrow V_0 > 0$)

donde $V_0 \gg \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{energía de la partícula incidente}}$.

La siguiente es la geometría de este problema:



$2\alpha + \theta = \pi$

$\alpha + \theta + \beta = \pi$

$(\alpha = \beta\ !)$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi - \theta}{2} = \beta \quad , \quad b = R \sin\beta$$
$$= R \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\searrow \quad b = R \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin\frac{\theta}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R^2 \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2}}{2 \sin\theta}$$
$$= \frac{R^2}{4}.$$

$$\searrow \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}}$$

Si ahora integramos sobre todo el ángulo sólido, obtenemos la sección eficaz total, σ_{TOT} $\longrightarrow$

$$\sigma_{TOT} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot d\Omega = \frac{R^2}{4} \cdot 4\pi = \pi R^2 ,$$

con lo cual llegamos a una interpretación muy clara del significado físico de la sección eficaz.

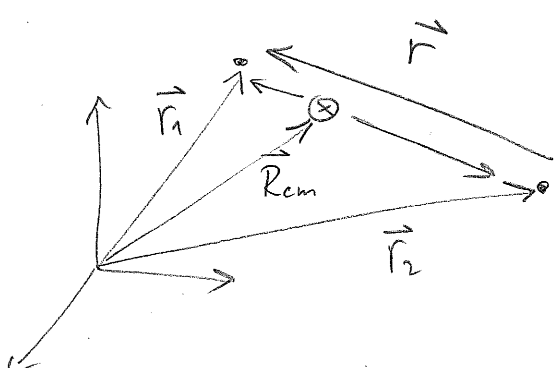
El siguiente ejemplo que consideraremos se conoce como "scattering de Rutherford" (clásico). Históricamente jugó un papel fundamental en el descubrimiento del núcleo atómico por parte de Rutherford.

Pero antes de calcular la sección eficaz para este ejemplo (donde la fuerza es la fuerza de Coulomb), es conveniente recordar el problema de 2 cuerpos con fuerza central.

→ "El problema de Kepler"

↳ Problema de 2 cuerpos con fuerza central.

$U = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ → función de energía potencial



$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{(centro de masa)}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \text{(coord. relativa)}$$

Ecs. de movimiento:
$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{\nabla} U$$
$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{\nabla} U$$

• Suma: $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{cm} \equiv M \vec{V}_{cm} = \text{cte}$; $M = m_1 + m_2$ (masa total)

• Resta: $\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \vec{\nabla} U(r) \Rightarrow \mu \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U(r)$,

$$\text{con} \quad \frac{1}{\mu} := \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$
(masa reducida)

$\rightarrow$ $$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U(r)}$$

Problema "efectivo" de 1-cuerpo.

Para solucionar las ecs. de movimiento $\rightarrow$ usar leyes de conservación.

- Momento angular:

El momento angular total, L_{TOT}, se conserva.

$$\vec{L}_{TOT} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \ , \qquad \vec{l}_i = m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \ .$$

Ejercicio: $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 \overset{!}{=} \vec{l} + \vec{L}_{cm}$, donde

$\vec{l} := \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ (momento angular relativo)

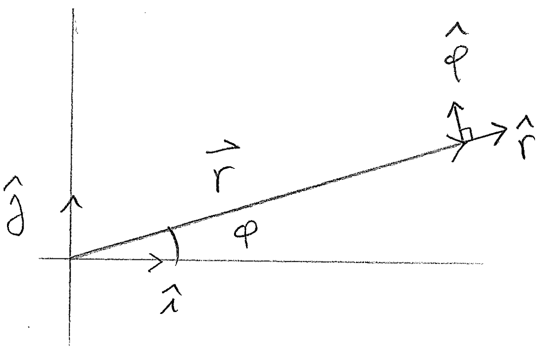
$\vec{L}_{cm} := M \vec{R}_{cm} \times \dot{\vec{R}}_{cm}$ (mom. ang. de c.m.)

Como $\dot{\vec{R}}_{cm} = cte$, se sigue que $\vec{L}_{cm} = cte$ y -por el ejercicio- concluimos que

$$\vec{l} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = cte \longrightarrow \text{cantidad conservada.}$$

$\Rightarrow$ El movimiento tiene lugar exclusivamente en un plano perpendicular al vector $\vec{l}$.

→ En dicho plano podemos usar coordenadas polares:



$$\vec r = r\hat r$$

$$\begin{cases} \hat r = \cos\varphi\,\hat\imath + \sin\varphi\,\hat\jmath \\ \hat\varphi = -\sin\varphi\,\hat\imath + \cos\varphi\,\hat\jmath \end{cases}$$

$$\longrightarrow \dot{\hat r} = \dot\varphi\,\hat\varphi$$

$$(\hat r\times\hat\varphi = \hat\imath\times\hat\jmath \equiv \hat k)$$

Sea $l := \|\vec l\|$.

Como $\dot{\vec r} = \frac{d}{dt}(r\hat r) = \dot r\hat r + r\dot{\hat r} = \dot r\hat r + \dot\varphi r\hat\varphi$,

se sigue que

$$\vec l = \mu\vec r\times\dot{\vec r} = \mu r\hat r\times(\dot r\hat r + \dot\varphi r\hat\varphi) = \mu\dot\varphi r^2\hat k$$

$$\longrightarrow \boxed{l = \mu r^2|\dot\varphi|}$$

• Energía:

Como $\frac{1}{2}m_1\dot{\vec r}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec r}_2^{\,2} \overset{!}{=} \frac{1}{2}\mu\dot{\vec r}^{\,2} + \frac{1}{2}M\dot{\vec R}_{cm}^{\,2}$ (ejercicio!),

se sigue que

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec r}^{\,2} + U(r)$$

se conserva.

Podemos reescribir E en términos de $r, \dot{r}$ y l:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r) = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu \dot{\varphi}^2 r^2 + U(r)$$

$$\left[\dot{\varphi}^2 = \frac{l^2}{\mu^2 r^4} \right]$$

$$\hookrightarrow \quad E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu \frac{l^2}{\mu^2 r^4} \cdot r^2 + U(r)$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \underbrace{\left(U(r) + \frac{l^2/2\mu}{r^2} \right)}_{\equiv U_{ef}(r)}$$

(potencial efectivo)

Con esto podemos escribir las ecs. de movimiento en términos de las 2 cantidades conservadas E (energía) y l (momento angular)

$$\rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - U_{ef})}{\mu}}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}$$

Eliminando la variable temporal, obtenemos una ec. diferencial para $r = r(\varphi)$

$\longrightarrow$

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2\mu(E-U_{ef})}{\ell^2}}.$$

La ecuación toma una forma más simple con el cambio de variable. $x = \frac{1}{r}$ $\left(\longrightarrow dx = -\frac{1}{r^2}dr\right)$

$$\searrow \qquad \frac{dx}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{E-U_{ef}}{(\ell^2/2\mu)}}. \qquad (*)$$

Para un potencial "tipo Coulomb", tenemos $\boxed{U(r) = -\frac{\lambda}{r}}$,

donde λ puede ser negativa (fuerza repulsiva) o positiva (fuerza atractiva).

Introduciendo $\alpha = \frac{\ell^2}{2\mu}$, podemos entonces escribir

$$U_{ef}(r) = -\frac{\lambda}{r} + \frac{\alpha}{r^2} \underset{\substack{\uparrow \\ x = 1/r.}}{=} -\lambda x + \alpha x^2$$

Escribiendo $x' \equiv \frac{dx}{d\varphi}$ y completando cuadrados (en x), podemos reescribir $(*)$ de la siguiente forma (ejercicio!):

$$\boxed{(x')^2 + \left(x - \frac{\lambda}{2\alpha}\right)^2 = \frac{E}{\alpha} + \frac{\lambda^2}{4\alpha^2}} \qquad (**)$$

El lado derecho de la ec. anterior es mayor que cero si $E > 0$, que es el caso que corresponde a órbitas abiertas, las relevantes para el problema de scattering.

Para las órbitas cerradas se debe tener $E < 0$. Pero aún en este caso sigue siendo cierto que $\frac{E}{\alpha} + \frac{\lambda^2}{4\alpha^2} > 0$.

Para mostrar esto basta con recordar que E debe ser en todo caso mayor que el valor mínimo de U_{ef}. Este valor se alcanza a un radio $r_0 = \frac{2\alpha}{\lambda}$, de tal forma que

$$U_{ef}(r_0) = \frac{-\lambda}{r_0} + \frac{\alpha}{r_0^2} = -\frac{\lambda^2}{4\alpha}.$$

Podemos, por lo tanto, asumir que $\frac{E}{\alpha} + \frac{\lambda^2}{4\alpha^2} > 0$, de tal forma que la solución a la ec. (**) de la página anterior está dada por

$$x(\varphi) = \frac{\lambda}{2\alpha} + \sqrt{\frac{E}{\alpha} + \frac{\lambda^2}{4\alpha^2}}\ \cos\varphi$$

Como $x = \frac{1}{r}$, podemos reescribir la expresión anterior en términos de r y φ, obteniendo así la solución que buscábamos:

$$r(\varphi) = \frac{2\alpha/\lambda}{1+\sqrt{1+\frac{4\alpha E}{\lambda^2}}\cdot\cos\varphi} \equiv \frac{A}{1+\varepsilon\cdot\cos\varphi}$$

$\varepsilon > 1$: hipérbola , $\varepsilon = 0$: círculo , $\varepsilon < 1$: elipse.

En nuestro caso (scattering, que corresponde a órbitas abiertas, de tal forma que $E > 0$) tenemos $\varepsilon > 1$, luego se trata de trayectorias hiperbólicas.

Recordemos que el vector $\vec{r} = (x, y)$, cuyas coordenadas polares son (r, φ), es el vector de posición relativa, que va de m_2 hacia m_1. Si suponemos que el proyectil es m_1, la trayectoria determinada por $\vec{r}$ es la que nos interesa.

Sin embargo, para simplificar los cálculos es conveniente describir dicha trayectoria (parábola) usando coordenadas con origen en el centro de la hipérbola y no en uno de sus focos. Esto se logra simplemente con un desplazamiento en x:

$$x \longmapsto x - c\,.$$

En otras palabras, si partimos de la forma polar

$$\underbrace{r(\varphi) = \frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi}}_{(i)} \quad \text{y definimos (nuevas coordenadas!)} \quad \left.\begin{aligned} x &= c + r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}(ii),$$

entonces tenemos:

$\longrightarrow$ Por (i): $\quad r = A - \varepsilon r\cos\varphi \overset{(ii)}{=} A - \varepsilon(x-c)$

$\longrightarrow$ Por (ii): $\quad r^2 = (x-c)^2 + y^2$

Igualando las 2 expresiones para r^2:

$$(x-c)^2 + y^2 = [A - \varepsilon(x-c)]^2$$

Si ahora expandimos ambos lados y escogemos c de tal forma que los términos lineales en x se cancelen,

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = [(A+\varepsilon c) - \varepsilon x]^2 = (A+\varepsilon c)^2 - 2\varepsilon(A+\varepsilon c)x + \varepsilon^2 x^2$$

$$\longrightarrow c \overset{!}{=} \varepsilon(A+\varepsilon c) \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} A}$$

La ecuación se simplifica a

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 = (A+\varepsilon c)^2 - c^2.$$

Notemos que debido a la escogencia de c se tiene también que

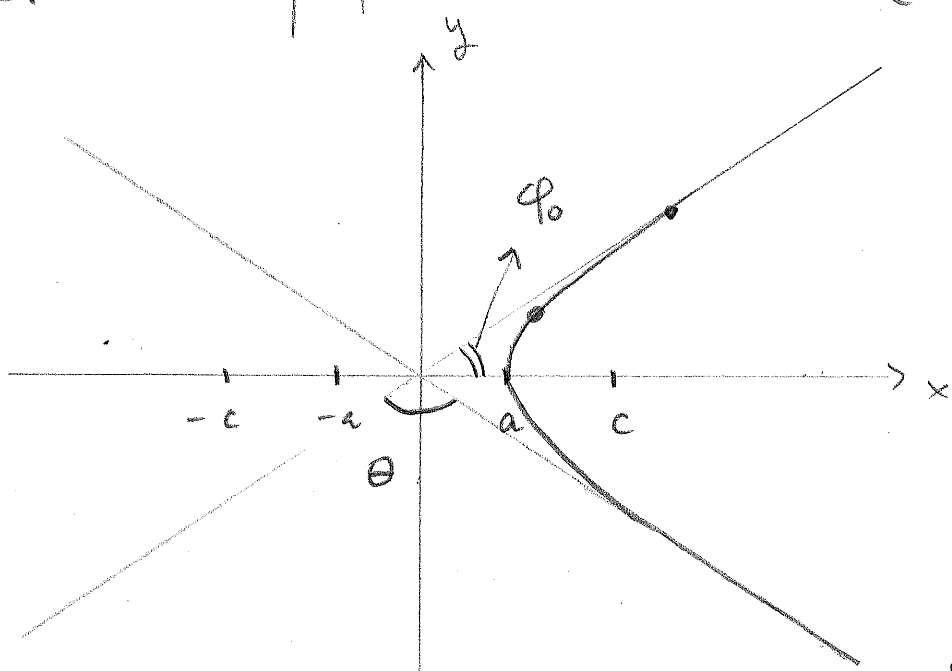
$$A + \varepsilon c = A + \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}A\right) = \frac{A}{1-\varepsilon^2}$$

↳ Resulta conveniente introducir

$$a = \frac{A}{1-\varepsilon^2}$$

La ec. se simplifica a: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1$

Nótese que $c^2 - a^2 = \frac{1}{\varepsilon^2-1}A^2 > 0$



Si llamamos φ_0 a la pendiente de la asíntota, es claro de la figura que se debe tener

$2\varphi_0 + \theta = \pi$, donde θ es el ángulo de dispersión.

También es claro, de la ecuación de la hipérbola, que $\tan\varphi_0 = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1}$

Como $c = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} A$ y $a = \frac{1}{1-\varepsilon^2} A$, tenemos $\frac{c}{a} = \varepsilon$,

luego $\tan\varphi_0 = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{\frac{4\alpha E}{\lambda^2}} = \frac{\ell}{\lambda}\sqrt{\frac{2E}{\mu}}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\tan\varphi_0 = \frac{\ell}{\lambda}\sqrt{\frac{2E}{\mu}}}$$