

El campo escalar.

Vamos a comenzar nuestro estudio de la renormalización perturbativa realizando un breve repaso acerca del campo escalar y su cuantización.

Aunque desde el punto de vista moderno no sería estrictamente necesario discutir la cuantización de un campo clásico para introducir los elementos principales de una teoría cuántica de campos, resulta muy conveniente para desarrollar la intuición física. Luego de repasar lo que se podría considerar la versión "estándar" del proceso de cuantización de un campo, presentaremos una construcción que es matemáticamente rigurosa y que nos será de gran utilidad al final del curso.

Algunas convenciones

A menos que se diga lo contrario, asumiremos que estamos trabajando sobre el espacio de Minkowski $M = (\mathbb{R}^4, g)$, donde g hace referencia a la métrica

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La signatura de la métrica $(1, 3)$ es la que se usa normalmente en física de partículas (en relatividad general es más usual trabajar con signatura $(3, 1)$).

Para 4-vectores, usaremos la notación $x = (x^0, \vec{x}) = "x^\mu"$ de tal forma que

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \rightarrow "x_\mu" = (x^0, -\vec{x}). \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu, \text{ etc.}$$

→ La ecuación de Klein-Gordon: $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi(x) = 0$.

Nos interesan (por el momento) soluciones reales (que darán lugar a un sistema de partículas sin carga eléctrica), así que debemos asegurar que se cumpla la condición

$$\varphi(x) = \varphi(x)^* \quad E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad \rightarrow$$

Soluciones, en ondas planas, de la ec. de Klein-Gordon →

$$\boxed{\varphi_p(x) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip \cdot x} \Big|_{\vec{p}^0 = E_p}$$

La idea principal consiste en implementar una descomposición invariante (de Lorentz) de la transformada de Fourier del campo, para luego usar los coeficientes de Fourier para implementar la cuantización. Una forma de motivar esto es a través del estudio de la ecuación de onda como el resultado de un proceso de límite al continuo de un sistema lineal (cadena) de osciladores acoplados. Lo que sería una "cuantización colectiva" de las amplitudes de cada uno de los osciladores termina siendo la prescripción según la cual los coeficientes de Fourier adquieren un carácter de operadores.

→ Transf. de Fourier (resp. a la métrica de Minkowski, $d=4$): $\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(p)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^4 p e^{ip \cdot x} \tilde{\varphi}(p) \quad (n=4)$$

Para que $\varphi(x)$ sea solución de la ec. de Klein-Gordon, es suficiente y necesario que su transformada de Fourier $\tilde{\varphi}(p)$ sea de la forma

$$\tilde{\varphi}(p) = \sqrt{2\pi} \delta(p^2 - m^2) a(p)$$

- La introducción de factores " 2π " es completamente arbitraria
- La presencia de la distribución de Dirac $\delta(p^2 - m^2)$ permite expresar $\varphi(x)$ como una integral sobre el "hiperboloide de masa m ", con una medida invariante de Lorentz. Dicho hiperboloide es una subvariedad de M , de dimensión 3.
- $\varphi(x) = \varphi(x)^* \iff \tilde{\varphi}(-p) = \tilde{\varphi}(p)^* \iff a(-p) = a(p)^*$
- Como $a(p)$ va acompañado de $\delta(p^2 - m^2)$, se debe cumplir $p^0 = E_p$ ("on shell"), así que podemos definir $a_{\vec{p}} \equiv a_p := a(E_p, \vec{p})$
- Podríamos perfectamente cambiar $a(p)$ por $a(p)^*$, ya que se trata de una convención. Físicamente, la escogencia que se haga corresponde a qué decidiremos llamar "partícula" y qué "anti-partícula" (relevante solo para el caso complejo).

Lo anterior nos lleva a la expansión (invariante de Lorentz) siguiente:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(f_{\vec{p}}(x) a_{\vec{p}}^* + f_{\vec{p}}^*(x) a_{\vec{p}} \right)$$

Es aparente, de la expansión anterior, que cada escogencia de coeficientes $\vec{p} \mapsto a_{\vec{p}}$ dará lugar a una solución de la ecuación. Como la ecuación de Klein-Gordon es una ecuación hiperbólica, basta con tener un conjunto de datos iniciales sobre cualquier superficie de Cauchy para, a partir de esto, determinar la solución completa. Esto nos lleva a pensar que los coeficientes $a_{\vec{p}}$ deben estar relacionados con las condiciones iniciales. En efecto, no es difícil mostrar que se tiene la siguiente identidad:

$$a_{\vec{p}} = \int d^3\vec{x} f_{\vec{p}}(x) (E_p \varphi(x) - i\dot{\varphi}(x)) \quad (3.1)$$

→ aquí $x = (x^0, \vec{x})$, con x^0 arbitrario

La validez de la identidad se establece mostrando que la dependencia de la integral en x^0 es superflua. Esto permite, en particular, evaluarla en $x^0 = 0$, de donde fácilmente se sigue el resultado.

Consideremos entonces una solución $\varphi(x)$ sujeta a las siguientes condiciones iniciales:

$$\varphi(0, \vec{x}) = g(\vec{x}), \quad \dot{\varphi}(0, \vec{x}) = h(\vec{x}),$$

donde g, h son funciones definidas sobre \mathbb{R}^3 (la superficie de Cauchy que hemos escogido), con propiedades de regularidad/decaimiento apropiadas. Usando la notación $\hat{F}_{\vec{p}}(t)$ para la transformada de Fourier respecto a \vec{x} de una función $F(t, \vec{x})$, i.e.,

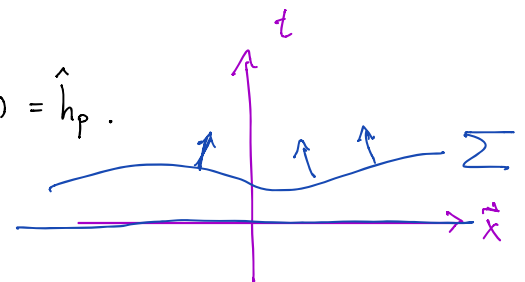
$$\hat{F}_{\vec{p}}(t) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} F(t, \vec{x}) d^3\vec{x}, \quad (3.2)$$

es fácil ver que se debe tener $\hat{\varphi}_{\vec{p}}(0) = \hat{g}_{\vec{p}}$, así como $\dot{\hat{\varphi}}_{\vec{p}}(0) = \hat{h}_{\vec{p}}$.

Se sigue entonces que

$$a_{\vec{p}} = E_{\vec{p}} \hat{g}_{\vec{p}} - i \hat{h}_{\vec{p}},$$

como se quería.



Observación:

Nótese que, haciendo uso de la definición (3.2) la ecuación de Klein-Gordon se puede escribir como $\ddot{\hat{\varphi}}_{\vec{p}}(t) = -E_{\vec{p}}^2 \hat{\varphi}_{\vec{p}}(t)$, lo que confirma la idea de que podemos considerar el campo φ como una "colección infinita de osciladores armónicos" \rightarrow por cada \vec{p} tenemos un oscilador con amplitud $\hat{\varphi}_{\vec{p}}(t)$ y frecuencia $E_{\vec{p}}$.

La cuantización del campo escalar puede ahora proceder a partir de la descomposición

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \left(f_{\vec{p}}(x) a_{\vec{p}} + f_{\vec{p}}^*(x) a_{\vec{p}}^* \right).$$

La idea es ahora considerar los coeficientes $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^*$ como operadores (escribiremos $a_{\vec{p}}^{\dagger}$ en el segundo caso) que están sujetos a las siguientes reglas de conmutación:

CCR : $[a_{\vec{q}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}] = 2E_p \delta(\vec{p}-\vec{q})$, $[a_{\vec{q}}^{\dagger}, a_{\vec{p}}^{\dagger}] = 0 = [a_{\vec{q}}, a_{\vec{p}}]$.

Para ganar una idea adecuada acerca de las consecuencias y el significado físico de este "postulado de cuantización canónica", es conveniente estudiar lo que ocurre con otras cantidades (como la energía y el momento total del campo) al ser expresadas en términos de operadores de creación/aniquilación (consultar, para esto, las notas de clase del curso "Física de Partículas").

Cuantización del campo escalar: una formulación alternativa

- El método que presentaremos a continuación tiene la gran ventaja de que se presta (casi sin modificaciones) para formular satisfactoriamente el problema de cuantización de campos en espacio-tiempos curvos. Además, permite construir ejemplos concretos que ilustran los principios básicos del enfoque algebraico a la teoría cuántica de campos.
- Por simplicidad, presentaremos la idea central a través de un "toy model" (el oscilador armónico). De esta forma podremos concentrarnos en los puntos esenciales de la construcción, haciendo uso de conceptos elementales de mecánica cuántica. Una vez entendido este ejemplo, se puede proceder a considerar la generalización al caso del campo escalar, que es casi inmediata.

→ Ya hemos mencionado que un campo escalar puede ser considerado, de cierta forma, como una "colección de un número infinito de osciladores". Para justificar trabajar con un solo oscilador como nuestro "modelo de juguete" de un campo escalar, consideremos la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0.$$

Si trabajamos en el espacio de Minkowski, con dimensión $D=4=1+3$, podemos escribir

$$\partial_\mu \partial^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 = \partial_t^2 - \nabla^2.$$

Las expresiones análogas en los casos $D=3=1+2$ y $D=2=1+1$ son

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 = \partial_t^2 - \nabla_{(d=2)}^2 \quad (D=3=1+2)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \partial_x^2 \quad (D=2=1+1)$$

¿Qué ocurre, por lo tanto, si resolvemos ignorar por completo las dimensiones espaciales? Esto corresponde a considerar el caso $D=1+0$ ($\rightarrow d=0$).

En este caso, el operador de Klein-Gordon quedará reducido a $\partial_t^2 + m^2$.

Escribiendo μ en lugar de m , vemos que la ec. de Klein-Gordon es el caso

$D=1+0$ no es otra cosa que la ecuación de movimiento de un oscilador armónico:

$$(\partial_t^2 - \mu^2)q(t) = \ddot{q}(t) + \mu^2 q(t) = 0.$$

Aquí, el "campo" $q(t, -) \equiv q(t)$ no es otra cosa que la amplitud del oscilador.
↑ no hay posición!

Lo que vamos a presentar a continuación es un método de cuantización partiendo de la ec.

$$\ddot{q} + \mu q = 0. \quad (6.1)$$

Algunas observaciones:

- 1) La ec. (6.1) es una ecuación diferencial. Sean $q^{(1)}$ y $q^{(2)}$ dos soluciones de la misma. Por linealidad, está claro que $\alpha q^{(1)} + \beta q^{(2)}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) es también una solución \rightarrow El conjunto de soluciones es un espacio vectorial.
- 2) En este caso, como bien sabemos, la dimensión del espacio de soluciones es 2. Esta es una diferencia importante \rightarrow Para la ec. de KG, el espacio de soluciones es un espacio infinito-dimensional.
- 3) Una base para el espacio de soluciones está dada por $\{e^{i\mu t}, e^{-i\mu t}\}$. Sin embargo, nos interesa considerar únicamente soluciones reales, así que usaremos $\sin \mu t$ y $\cos \mu t$ como los vectores base.

\rightarrow Definamos el siguiente espacio vectorial real:

$$\mathcal{S} := \{q \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \ddot{q}(t) + \mu^2 q(t) = 0, q(t) \in \mathbb{R} \forall t\} \quad (6.2)$$

Cualquier solución $q(t)$ está completamente determinada por las condiciones iniciales.

Usaremos $q(0) \equiv q_0$ y $p(0) = \mu \dot{q}(0) = p_0$ (posición y momento) como condiciones iniciales.

→ La sol. general de $\ddot{q} + \mu^2 q = 0$ es

$$q(t) = q_0 \cos \mu t + \frac{p_0}{\mu} \sin \mu t \quad (7.1)$$

Si usamos $\{\cos \mu t, \mu^{-1} \sin \mu t\}$ como base para \mathcal{S} , entonces las coordenadas de q , como vector en \mathcal{S} , serán (q_0, p_0) .

→ Cada punto en el espacio de fase determina una única solución.

En el contexto de la mecánica clásica Hamiltoniana, es natural hacer uso del corchete de Poisson para describir tanto la dinámica como las simetrías de un sistema dado.

Si $H(q, p)$ es el Hamiltoniano del sistema y f una función suave en el espacio de fase, entonces el valor de f a lo largo de las trayectorias físicas $t \mapsto (q(t), p(t))$ (soluciones de las ecs. de Hamilton) está determinado por $\dot{f} = \{H, f\}$, donde

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} \right) \quad (\text{corchete de Poisson}). \quad (7.2)$$

Podemos reescribir el corchete de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \sum_{i=1}^n (\partial_{p^i} f \partial_{q^i} g - \partial_{q^i} f \partial_{p^i} g) = \\ &= (\partial_{q^1} f, \partial_{q^2} f, \dots, \partial_{q^n} f, \partial_{p^1} f, \dots, \partial_{p^n} f) \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix}}_{= \mathbb{M}} \begin{pmatrix} \partial_{q^1} g \\ \vdots \\ \partial_{q^n} g \\ \partial_{p^1} g \\ \vdots \\ \partial_{p^n} g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz \mathbb{M} se conoce como "matriz simpléctica".

$$\text{Si definimos una aplicación } \sigma : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \quad (7.3)$$

$$u, v \mapsto \sigma(u, v) := u^T \mathbb{M} v$$

vemos que σ es

- i) Bilineal: $\sigma(u_1 + \lambda u_2, v) = \sigma(u_1, v) + \lambda \sigma(u_2, v)$,
 $\sigma(u, v_1 + \lambda v_2) = \sigma(u, v_1) + \lambda \sigma(u, v_2)$, $u, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2n}, \lambda \in \mathbb{R}$

ii) Antisimétrica: $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$

iii) No degenerada: $\sigma(x, y) = 0 \forall y \Rightarrow x = 0$.

Vemos entonces que la estructura simpléctica del espacio de fase está íntimamente relacionada con la dinámica clásica. En el caso más general de una variedad simpléctica (M, ω) , donde ω toma localmente la forma (7.3), podemos definir el corchete de Poisson haciendo uso de la forma simpléctica y del campo Hamiltoniano X_f asociado a cada función f (recordar que $\omega(X_f, \cdot) = df$):

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g).$$

En vista del isomorfismo $\mathcal{J} \cong T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$, vemos que \mathcal{J} debe heredar la estructura simpléctica natural de $T^*\mathbb{R}$.

→ Sean $q^{(1)}, q^{(2)} \in \mathcal{J}$. Definamos

$$\sigma(q^{(1)}, q^{(2)}) := \dot{q}^{(1)}(t)q^{(2)}(t) - q^{(1)}(t)\dot{q}^{(2)}(t) \quad (8.1)$$

$(t \in \mathbb{R}, \text{arbitrario})$

Para que esta expresión de lugar a una forma simpléctica, es necesario verificar que no depende de t , además de las 3 propiedades enunciadas en (7.3).

Podemos realizar ambas tareas simultáneamente:

$$\begin{aligned} \sigma(q^{(1)}, q^{(2)}) &= \dot{q}^{(1)}(t)q^{(2)}(t) - q^{(1)}(t)\dot{q}^{(2)}(t) \\ &= \left[\frac{d}{dt} (q_0^{(1)} \cos \mu t + \mu^{-1} p_0^{(1)} \sin \mu t) \right] (q_0^{(2)} \cos \mu t + \mu^{-1} p_0^{(2)} \sin \mu t) \\ &\quad - \left[\frac{d}{dt} (q_0^{(2)} \cos \mu t + \mu^{-1} p_0^{(2)} \sin \mu t) \right] (q_0^{(1)} \cos \mu t + \mu^{-1} p_0^{(1)} \sin \mu t) \\ &= q_0^{(2)} p_0^{(1)} - q_0^{(1)} p_0^{(2)} \quad (8.2) \\ &= (q_0^{(1)}, p_0^{(1)}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0^{(2)} \\ p_0^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El par (\mathcal{J}, σ) da lugar, de manera natural, a un álgebra involutiva, $\mathcal{W}(\mathcal{J}, \sigma)$, definida en términos de generadores $W(u)$ (donde $u \in \mathcal{J}$) que están sujetos a las siguientes relaciones:

$$W(u)W(v) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(u,v)} W(u+v), \quad (8.3)$$

con involución definida a través de $W(u)^* = W(-u)$.

El álgebra $\mathcal{W}(\mathcal{L}, \sigma)$ se denomina Álgebra de Weyl.

- Una involución en un álgebra \mathcal{A} (sobre \mathbb{C}) es un mapa $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que
 - (i) $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$; $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathcal{A}$ y
 - (ii) $(ab)^* = b^* a^*$
- Si $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, el álgebra de matrices $n \times n$ con entradas complejas, entonces $A^* = A^\dagger$ (operación de tomar la matriz adjunta) define una involución.
- Las relaciones (8.3), que definen el álgebra de Weyl, no son otra cosa que las relaciones de conmutación canónicas, en su versión exponencial y expresadas en términos de la forma simpléctica.

→ Para ganar familiaridad con el álgebra de Weyl vale la pena trabajar de manera explícita la forma exponencial de las relaciones de conmutación canónicas (CCR).

Recordemos:

$$\text{CCR: } [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad \rightsquigarrow \text{Clásicamente, } \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \text{ (estructura simpléctica)}$$

$$\text{Dirac: } \rightarrow \text{cuantización} \rightarrow \text{reemplazar corchetes de Poisson por conmutadores: } f \mapsto \hat{f},$$

$$[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar \{f, g\}^\wedge$$

Forma exponencial (de Weyl) de las CCR:

Definimos ($n=1$, por simplicidad)

$$U(a) := e^{-ia\hat{p}}, \quad V(b) := e^{-ib\hat{q}}$$

Trabajando en la representación usual (Schrödinger), tenemos:

$$(\hat{q}\Psi)(x) = x\Psi(x), \quad (\hat{p}\Psi)(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} \Psi(x) \quad \Rightarrow$$

$$V(b)\Psi(x) = e^{-ib\hat{q}}\Psi(x) = e^{-ibx}\Psi(x), \quad \longrightarrow \quad (U(a)\Psi)(x) = \Psi(x-at)$$

$$U(a)\Psi(x) = e^{-ia\hat{p}}\Psi(x) = e^{-a\hbar \frac{d}{dx}}\Psi(x) \quad (V(b)\Psi)(x) = e^{-ibx}\Psi(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a\hbar \frac{d}{dx})^n}{n!} \Psi(x) = \Psi(x-at)$$

↓
Podemos usar esto para obtener las relaciones de conmutación entre $U(a)$ y $V(b)$.

$$\begin{aligned}
(U(a)V(b)\Psi)(x) &= U(a)(V(b)\Psi)(x) = (V(b)\Psi)(x-at\hbar) \\
&= e^{-ib(x-at\hbar)} \Psi(x-at\hbar) = e^{it\hbar ab} e^{-ibx} (U(a)\Psi)(x) \\
&= e^{it\hbar ab} V(b)U(a)\Psi(x)
\end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned}
U(a_1)U(a_2) &= U(a_1+a_2), \\
V(b_1)V(b_2) &= V(b_1+b_2), \\
U(a)V(b) &= e^{it\hbar ab} V(b)U(a).
\end{aligned} \tag{10.1}$$

Definiendo $W(a,b) := e^{-i(a\hat{q}+b\hat{p})} \stackrel{!}{=} e^{it\hbar ab/2} V(a)U(b)$ podemos calcular, haciendo uso de (10.1),

para obtener, si usamos la notación $u = (a,b)$, $v = (a',b')$,

$$W(u)W(v) = e^{-i(a\hat{q}+b\hat{p})} e^{-i(a'\hat{q}+b'\hat{p})} \stackrel{(10.1)}{=} \dots = e^{i\frac{\hbar}{2}(a'b-ab')} W(a+a', b+b')$$

$$\hookrightarrow W(u)W(v) = e^{-i\frac{\hbar}{2}\sigma(u,v)} W(u,v),$$

$$\uparrow \sigma((a,b),(a',b')) = ab' - a'b$$

que son justamente las relaciones que definen el álgebra de Weyl.

————— " —————

Funciones de Green

Recordemos que si P es un operador diferencial, para resolver la ec. diferencial inhomogénea $P\varphi = f$, basta con solucionar la ec. para una fuente puntual (delta de Dirac)

→ $P G = \delta$, de tal forma que la solución se puede expresar como una convolución entre la función de Green (G) y la fuente (f).

→ Función de Green para el oscilador armónico:

$$\ddot{q} + \mu^2 q = 0 \text{ (ec. homogénea)} \longrightarrow \text{F. Green } G \text{ es solución de}$$

$$\ddot{G}(t-t') + \mu^2 G(t-t') = \delta(t-t')$$

Pasando al espacio de Fourier,

$$G(t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} \tilde{G}(\omega), \text{ obtenemos } \tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\mu^2 - \omega^2}$$

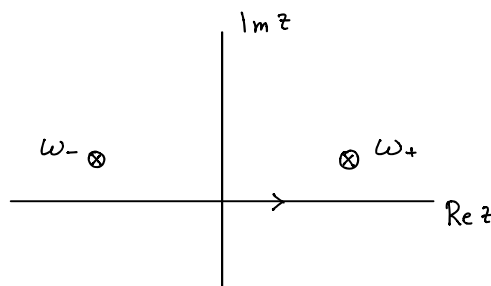
$$\Rightarrow G(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\mu^2 - \omega^2} \quad (11.1)$$

En esta expresión hay una ambigüedad, debida al hecho de que en la integral no se indica el contorno de integración. Para facilitar el análisis, conviene considerar el caso más general de un oscilador amortiguado, que obedece la ecuación $\ddot{q} + \frac{1}{\tau} \dot{q} + \mu^2 q = 0$ (al final tomaremos el límite $\tau \rightarrow \infty$). En este caso, la f. de Green está dada por

$$G(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\mu^2 - \omega^2 + \frac{i}{\tau}\omega}, \quad (11.2)$$

de tal forma que los polos estarán dados por $\omega_{\pm} = \frac{i}{2\tau} \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$

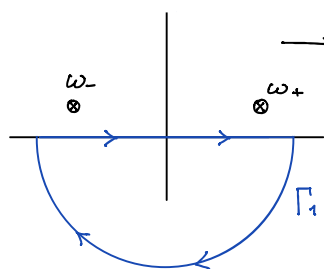
Asumiendo que $2\mu\tau > 1$ (nos interesa el límite $\tau \rightarrow \infty$), podemos representar los polos en el plano complejo, como se muestra a continuación:



$$\omega_+ - \omega_- = 2\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$$

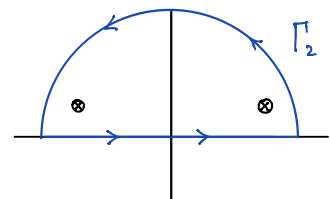
Para poder tener una integral convergente con un contorno que incluya la trayectoria que nos interesa (integración sobre $-\infty < \omega < \infty$), debemos considerar 2 casos.

• Caso 1: ($t < t'$)



$$\rightarrow G(t-t') = 0$$

• Caso 2: ($t > t'$)



$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{e^{iz(t-t')}}{(z-\omega_+)(z-\omega_-)} dz =$$

$$= -i \left(\frac{e^{i\omega_+(t-t')}}{\omega_+ - \omega_-} + \frac{e^{i\omega_-(t-t')}}{\omega_- - \omega_+} \right)$$

$$= e^{-\frac{(t-t')}{2\tau}} \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4\tau^2}}} \sin \left[\mu \sqrt{1 - \frac{1}{(2\tau\mu)^2}} (t-t') \right]$$

Tomando el límite $\tau \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$G(t-t') = \Theta(t-t') \frac{\sin \mu(t-t')}{\mu} \quad (11.3)$$

La inclusión del término disipativo, en realidad, tenía como objetivo generar una pequeña parte imaginaria, de la forma " $i\varepsilon$ ". Hubiéramos podido también incluir un término con el signo opuesto: " $-i\varepsilon$ ". En este caso, el término que acompaña a $\sin\mu(t-t')$ resulta ser $\Theta(t'-t)$ (nótese el orden invertido entre t y t').

Desde un punto de vista matemático, la inclusión de un término de la forma " $\pm i\varepsilon$ " se debe a que la función de Green $G(t,t')$ es una distribución. Por lo tanto, su transformada de Fourier se debe definir como la tr. de Fourier de una distribución. Más adelante estudiaremos más cuidadosamente estas propiedades de las distribuciones.

Por ahora, simplemente notemos que (11.3) en efecto es una función de Green para $\partial_t^2 + \mu^2$:

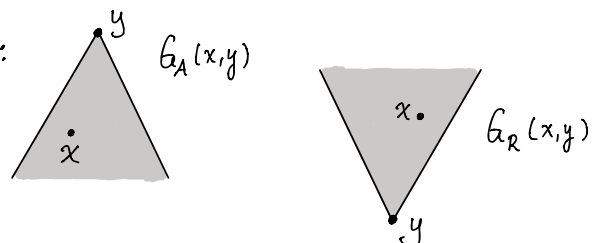
$$\begin{aligned} (\partial_t^2 + \mu^2) G(t,t') &= \partial_t^2 \left[\Theta(t-t') \frac{\sin\mu(t-t')}{\mu} \right] + \mu^2 \Theta(t-t') \frac{\sin\mu(t-t')}{\mu} \\ &= \partial_t \left[\delta(t-t') \frac{\sin\mu(t-t')}{\mu} + \Theta(t-t') \partial_t \frac{\sin\mu(t-t')}{\mu} \right] + \mu^2 \Theta(t-t') \frac{\sin\mu(t-t')}{\mu} \\ &= \underbrace{\delta(t-t') \frac{\sin\mu(t-t')}{\mu}}_{=-\delta(t-t')} + \underbrace{2\delta(t-t') \partial_t \frac{\sin\mu(t-t')}{\mu}}_{=2\delta(t-t')} + \underbrace{\Theta(t-t') (\partial_t^2 + \mu^2) \frac{\sin\mu(t-t')}{\mu}}_{=0} \\ &= \delta(t-t') \end{aligned}$$

La otra escogencia de signo (" $-i\varepsilon$ ") nos lleva a $G(t,t') = -\Theta(t'-t) \frac{\sin\mu(t-t')}{\mu}$.

Estas son las 2 funciones de Green que vamos a usar: la función de Green retardada y la avanzada. Definamos, por lo tanto,

$$G_R(t,t') := \Theta(t-t') \frac{\sin\mu(t-t')}{\mu}; \quad G_A(t,t') := -\Theta(t'-t) \frac{\sin\mu(t-t')}{\mu} \quad (12.1)$$

Los adjetivos "avanzada"/"retardada" están dados en función de las propiedades de soporte (dadas en este caso por la función escalón $\Theta(x)$). Las funciones de Green correspondientes en el caso de un campo escalar ($G_R(x,y)$, $G_A(x,y)$) tienen soporte sobre el cono de luz futuro (resp. pasado), como se muestra en las figuras:



Recordemos que, una vez cuantizado, el campo escalar (real) $\varphi(x)$ puede ser usado para calcular diferentes "funciones de correlación" / "funciones de Green" / "propagadores", etc. Una de las cantidades más importantes es la llamada "función de Pauli-Jordan" (o "commutator function") $\Delta(x,y)$, determinada a través de

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = i \Delta(x,y) \quad (13.1)$$

Es fácil mostrar que $\Delta(x,y)$ es una (distribución que es) solución de la ecuación de Klein-Gordon, i.e., $(\square_x + m^2)\varphi(x,y) = 0$. Además, Δ tiene soporte causal. Esto quiere decir que $\Delta(x,y) = 0$ siempre que $x \sim y$ (space-like). De manera equivalente, decimos que Δ tiene soporte en el cono de luz. En vista de (13.1) tiene sentido llamar a esta una condición de "microcausalidad".

Como $\Delta(x,y)$ no es un operador, vemos que se debe tener

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle.$$

Esta es la forma como se calcula "fácilmente" la función de Pauli-Jordan, una vez que hemos cuantizado el campo. Sin embargo, una observación fundamental es el hecho de que $\Delta(x,y)$ depende únicamente de la ec. de movimiento clásica.

→ Si comenzamos con $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0$ y a partir de aquí obtenemos las funciones de Green retardada y avanzada, $G_{R/A}(x,y)$, entonces se puede mostrar que

$$\Delta(x,y) = G_R(x,y) - G_A(x,y) \quad (13.2)$$

Como también tenemos (13.1), definiendo la función de Wightman

$$W(x,y) := \langle 0 | \varphi(x)\varphi(y) | 0 \rangle, \quad (13.3)$$

vemos que se deben cumplir las siguientes identidades:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = i \Delta(x,y) = W(x,y) - W(y,x) = i(G_R(x,y) - G_A(x,y)) \quad (13.4)$$

(esto no quiere decir que $W(x,y)$ sea igual a $iG_R(x,y)$!!)

Analicemos el análogo de (13.4) para el caso del oscilador armónico.

Usando la definición de los operadores de creación/aniquilación para el oscilador en términos de q y p ,

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip), \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip),$$

y tomando $H = \mu(a^\dagger a + 1/2)$ como Hamiltoniano tenemos, en el esquema de Heisenberg,

$$a^\dagger(t) = e^{i\mu t a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\mu t a^\dagger a} = e^{i\mu t} a^\dagger.$$

$$\text{Se sigue que } q(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(t) + a^\dagger(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\mu t} a^\dagger + e^{-i\mu t} a) \Rightarrow$$

$$\langle 0 | q(t) q(t') | 0 \rangle = \frac{e^{i\mu(t-t')}}{2\mu} \Rightarrow \langle 0 | [q(t), q(t')] | 0 \rangle \equiv i\Delta(t-t') = i \frac{\sin \mu(t-t')}{\mu} \quad (14.1)$$

La afirmación importante es que la ec. de movimiento clásica contiene toda la información necesaria para obtener Δ . De hecho es fácil comprobar que en nuestro ejemplo sencillo se cumple (13.4); es decir, tenemos $\Delta(t, t') = G_R(t, t') - G_A(t, t')$.

En efecto, de (12.1) se sigue que

$$G_R(t, t') - G_A(t, t') = \theta(t-t') \frac{\sin \mu(t-t')}{\mu} + \theta(t'-t) \frac{\sin \mu(t-t')}{\mu} = \frac{\sin \mu(t-t')}{\mu} \quad (14.2)$$

Como veremos a continuación $\Delta(t, t')$ codifica, justamente, toda la información de la estructura simpléctica de (\mathcal{J}, σ) .

$$\text{Comencemos por definir } \xi_\mu(t) := \frac{\sin \mu t}{\mu} \quad (14.3)$$

Se sigue que $\xi_\mu(t-t') = \Delta(t-t')$.

Definamos el siguiente operador integral: $E : C_0^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}),$

$$(Ef)(t) := \int_{\mathbb{R}} dt' \Delta(t-t') f(t') \equiv (\xi_\mu * f)(t) \quad (14.4)$$

Ejercicio.

(i) Mostrar que $Ef \in \mathcal{J} \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

(ii) Sea $q \in \mathcal{J}$. Mostrar que existe $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $q = Ef$.

$$\Rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}) / \text{Ker } E \cong \mathcal{J} \quad (14.5)$$

Como hemos mencionado, todo elemento de \mathcal{J} (un espacio de $\dim=2$) está unívocamente determinado por los datos iniciales (q_0, p_0) . Ya que tanto $C_0^\infty(\mathbb{R})$ como $\text{Ker } E$ son ∞ -dimensionales, nos gustaría poder entender mejor el isomorfismo (14.5). Esto se logra fácilmente haciendo uso de la transformada de Fourier \rightarrow

$$(\mathbb{E}f)^\wedge(\omega) = (\xi_\mu * f)^\wedge(\omega) = \hat{\xi}_\mu(\omega) \hat{f}(\omega)$$

Tenemos, por un lado,

$$\hat{\xi}_\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-i\omega t}}{2\mu i} (e^{i\mu t} - e^{-i\mu t}) = \frac{i\pi}{\mu} (\delta(\mu+\omega) - \delta(\mu-\omega))$$

Por otro lado, como f es real, tenemos $\hat{f}(-\mu) = \overline{\hat{f}(\mu)}$, de tal forma que

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_\mu(\omega) \hat{f}(\omega) &= \frac{i\pi}{\mu} (\delta(\mu+\omega) \hat{f}(-\mu) - \delta(\mu-\omega) \hat{f}(\mu)) \\ &= -\frac{\pi}{\mu} (i \hat{f}(\mu) \delta(\mu-\omega) + \overline{i \hat{f}(\mu)} \delta(\mu+\omega)) \end{aligned}$$

Consideremos un elemento $q \in \mathcal{J}$ escrito como en (7.1), es decir:

$$q(t) = q_0 \cos \mu t + \frac{p_0}{\mu} \sin \mu t.$$

Su transformada de Fourier (factores de 2π suprimidos)

$$\hat{q}(\omega) = \left(\frac{q_0}{2} - i \frac{p_0}{2\mu} \right) \delta(\mu-\omega) + \left(\frac{q_0}{2} + i \frac{p_0}{2\mu} \right) \delta(\mu+\omega).$$

Si queremos tener $q = \mathbb{E}f$, debemos por lo tanto escoger f de tal forma que se cumpla

$$\hat{f}(\mu) = \frac{1}{\pi} (p_0 + i\mu q_0).$$

Esto nos lleva inmediatamente a una descripción más explícita de $\text{Ker } E$:

$$\text{Ker } E = \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\mu) = 0 \}.$$

Así mismo, ahora podemos exhibir de forma explícita el isomorfismo (14.5). En efecto, tenemos

$$\Psi: C_0^\infty(\mathbb{R}) / \text{Ker } E \longrightarrow \mathcal{J} \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$$

$$[f] \longmapsto \Psi([f]),$$

donde $\Psi([f])$ es la solución correspondiente a los datos iniciales

$$q_0 = \frac{\pi}{\mu} \text{Im } \hat{f}(\mu), \quad p_0 = \pi \text{Re } \hat{f}(\mu).$$

Podemos aprovechar el isomorfismo Ψ para obtener la forma explícita de la forma simpléctica inducida en $C_0^\infty(\mathbb{R})/\text{Ker } E$:

$$\sigma(q^{(1)}, q^{(2)}) = q_0^{(2)} p_0^{(1)} - q_0^{(1)} p_0^{(2)} = \dots = \langle f, \mathbb{E}g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

↑
ejercicio

↳ Podemos definir $\tilde{\sigma}([f], [g]) := \langle f, \mathbb{E}g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$.

Una forma de evitar usar el campo (cuántico) $\varphi(x)$, que tiene carácter distribución con valores en operadores, consiste en considerar las evaluaciones de la forma

$$\Phi(f) = \int d^4x \varphi(x) f(x).$$

En lugar de preocuparnos por darle sentido a la integral del lado derecho, definimos un álgebra $*$ cuyos generadores son símbolos $\Phi(f)$ (para $f \in C_0^\infty(M)$), sujetos a las relaciones

$$[\Phi(f), \Phi(g)] = i \langle f, \mathbb{E}g \rangle_{L^2(M)}.$$